

第七章 粒子在位置空间中的运动 III

Stern-Gerlach 实验

将 SG 实验过程简化并抽象为如下描述 (图 1). 自旋 1/2 粒子经过了 SG(z) 装置, 其中的磁场是

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = zB' \quad (1)$$

这里, B' 是磁场沿 z 方向的梯度. 当然, 这样的磁场是不存在的, 因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$. 更严格地, 可以把磁场的分量写为

$$B_x = -xB', \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0 + zB'$$

这里, B_0 是一个常数. 在实际情况中, $B_0 \gg B_x$, 这导致磁矩在 xy 平面内的分量以很大的角速度绕 z 轴旋转, 由于非零的 B_x 导致的粒子的受力的平均效果近乎为零. 因此, 我们可以简单地考虑 (1) 式的磁场, 把自旋粒子的哈密顿量表示为 $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B_z$, 进而写为

$$H = -2gS_z \otimes Z = -g\sigma_z \otimes Z \quad (2)$$

这里我们令 $\hbar = 1$. 常数 g 包含了粒子的质量、电荷、磁场的梯度等物理量, 描述了粒子的自旋自由度和空间自由度之间的耦合强度. 在哈密顿量的表达式 (2) 中, 我们采用了直积符号 \otimes 联系自旋力学量 σ_z 和空间位置力学量 Z , 这是为了提醒我们这两个力学量分属不同的自由度, 需要不同的 Hilbert 空间来描述. 描述 σ_z 的是二维复空间 \mathbb{C}^2 , 描述 Z 的则是无限维的连续的 Hilbert 空间. 当然, 粒子的量子态也是由这两部分构成的. 我们假设粒子的初态具有直积态的形式, 即

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \quad (3)$$

这里 $|\psi\rangle$ 表示粒子的自旋量子态, $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$. 而 $|\varphi\rangle$ 表示与空间自由度相关的量子态, 可以在位置表象中写为空间位置的波函数 $\varphi(x, y, z)$, 也可以在动量空间中写为动量波函数 $\varphi(p_x, p_y, p_z)$. 粒子的量子态随时间的演化由酉变换 $U(t)$ 决定,

$$U(t) = e^{-iHt} = e^{igt\sigma_z \otimes Z} \quad (4)$$

我们关注的被测力学量是 S_z , 或者说是 σ_z , 希望从粒子的波函数给出几率分布推知被测力学量取值 σ_z 取值 ± 1 的几率以及期望值.

在确定 $|\varphi\rangle$ 的具体形式之前, 可以先在 Heisenberg 图像中计算一下粒子的位置算符和动量算符随时间的变化情况. 容易看到, 粒子的位置算符 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 与 H 对易, 它们是守恒量. 动量算符 P_x 和 P_y 也是守恒量. 故只需要考虑 P_z 随时间的变化, 将 P_z 表示为 $\mathbb{1} \otimes P_z$

$$(\mathbb{1} \otimes P_z)(t) = U^\dagger(t)(\mathbb{1} \otimes P_z)U(t)$$

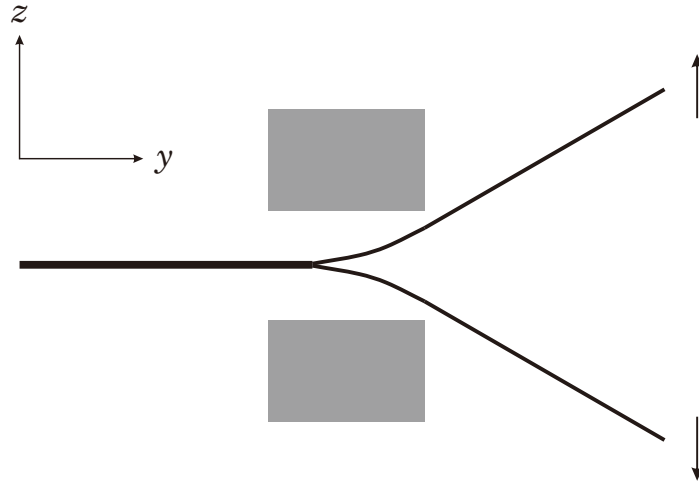


图 1: SG 实验示意图. 非均匀磁场的梯度为 z 方向, 自旋 $1/2$ 粒子穿过磁场区域后分为向上和向下偏转的两束.

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{1} \otimes P_z + [-igt\sigma_z \otimes Z, \mathbb{1} \otimes P_z] \\
 &\quad + \frac{1}{2!}[-igt\hat{\sigma}_z \otimes Z, [-igt\sigma_z \otimes Z, \mathbb{1} \otimes P_z]] + \dots \\
 &= \mathbb{1} \otimes P_z + gt(\sigma_z \otimes \mathbb{1})
 \end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) 建立了 t 时刻动量 P_z 的期望值与测量力学量 σ_z 在初态中的期望值之间的联系, 即

$$\langle P_z \rangle(t) = \langle P_z \rangle(0) + gt \langle \sigma_z \rangle(0)$$

我们希望知道的正是 $\langle \sigma_z \rangle(0)$, 它就是

$$\langle \sigma_z \rangle(0) = \frac{\langle P_z \rangle(t) - \langle P_z \rangle(0)}{gt} \tag{6}$$

上述推导意味着, 我们需要考虑粒子的动量的期望值的变化, 于是很自然地, 应该选择动量表象描述 $|\varphi\rangle$.

现在选择动量表象, $|\varphi\rangle$ 被表示为动量波函数 $\varphi(\mathbf{p}) = \varphi(p_x, p_y, p_z)$, 而酉变换 $U(t)$ 中的位置算符 Z 则要表示为 $i\hbar \frac{\partial}{\partial p_z}$. 我们已经设定 $\hbar = 1$, 故 $Z \rightarrow i \frac{\partial}{\partial p_z}$. 在酉变换 $U(t)$ 的作用下, 有

$$\begin{aligned}
 |\Psi(t)\rangle &= U(t) |\Psi(0)\rangle \\
 &= e^{igt\sigma_z \otimes Z} [(c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) \otimes |\varphi\rangle]
 \end{aligned}$$

在动量表象中, $|\varphi\rangle$ 应该表示为 $|\varphi\rangle = \int d^3p \varphi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle$, 下面我们简单地只写 $|\mathbf{p}\rangle$ 上分量 $\varphi(\mathbf{p})$

$$\begin{aligned}
 &= (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) \varphi(\mathbf{p}) + igt(c_0 |0\rangle - c_1 |1\rangle) i \frac{\partial \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z} \\
 &\quad + \frac{(igt)^2}{2!} (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) i^2 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z^2} + \frac{(igt)^3}{3!} (c_0 |0\rangle - c_1 |1\rangle) i^3 \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z^3} + \dots \\
 &= c_0 |0\rangle \left[\varphi(\mathbf{p}) - gt \frac{\partial \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z} + \frac{(gt)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z^2} - \frac{(gt)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z^3} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_1 |1\rangle \left[\varphi(\mathbf{p}) + gt \frac{\partial \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z} + \frac{(gt)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z^2} + \frac{(gt)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{p})}{\partial p_z^3} + \dots \right] \\
& = c_0 |0\rangle \varphi(p_x, p_y, p_z - gt) + c_1 |1\rangle \varphi(p_x, p_y, p_z + gt)
\end{aligned}$$

至此得到 t 时刻粒子的自旋和动量的整体的量子态

$$|\Psi(t)\rangle = c_0 |0\rangle \otimes |\varphi_0(t)\rangle + c_1 |1\rangle \otimes |\varphi_1(t)\rangle \quad (7)$$

其中 $|\varphi_0(t)\rangle$ 和 $|\varphi_1(t)\rangle$ 在动量空间中的表示分别是 $\varphi(p_x, p_y, p_z - gt)$ 和 $\varphi(p_x, p_y, p_z + gt)$.

这个量子态可以类比于最简单的 $2 \otimes 2$ 测量模型, 但是还不能说它们达到了最优形式. 在进一步分析之前, 需要说明如下两点.

1. 在开始的时候, 我们说, 通过粒子在空间的位置分布推知被测力学量 σ_z 的性质, 这就需要将 $|\Psi(t)\rangle$ 中的动量空间的波函数 $\varphi(p_x, p_y, p_z \pm gt)$ 通过傅里叶变换表示为位置空间的波函数, 由此会带来计算上的繁琐. 为了叙述的简明直观, 这里我们仅仅分析了粒子的动量分布而没有计算其位置分布, 换句话说, 我们假设测量仪器对粒子的动量有所响应.
2. 从 (7) 式看到, 酉变换前后的量子态始终是粒子的动量 P_x 和 P_y 的本征态, 这说明粒子的动量波函数与 p_x 和 p_y 的依赖关系是不重要的. 因此我们把初态中的动量空间的波函数简化为 $\varphi(p_z)$, 相应地, $|\Psi(t)\rangle$ 中的动量波函数简化为 $\varphi(p_z - gt)$ 和 $\varphi(p_z + gt)$, 并将它们分别记作 $\varphi_0(p_z, t)$ 和 $\varphi_1(p_z, t)$, 即

$$\varphi_0(p_z, t) = \langle p_z | \varphi_0 \rangle = \varphi(p_z - gt), \quad \varphi_1(p_z, t) = \langle p_z | \varphi_1 \rangle = \varphi(p_z + gt)$$

设初态的动量波函数是一个对称的 Gauss 波包,

$$\varphi(p_z) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{4\sigma^2}\right\} \quad (8)$$

在 $\varphi(p_z)$ 中动量 P_z 的期望值为零. 上式中的 σ 是 P_z 的标准偏差, 即

$$\sigma^2 = \langle P_z^2 \rangle_\varphi - \langle P_z \rangle_\varphi^2 = \langle P_z^2 \rangle_\varphi$$

几率密度 $|\varphi(p_z)|^2$ 是数理统计中常用的高斯分布. 图 2 描绘了 $\varphi(p_z)$ 和 $\varphi(p_z \pm gt)$ 的函数图像.

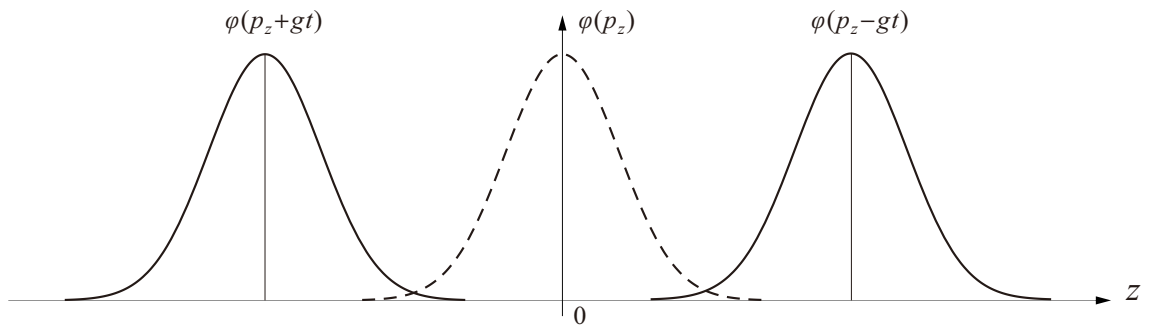


图 2: 自旋与空间位置之间的相互作用导致动量波函数发生平移.

从 (7) 中可以写出粒子的自旋部分的量子态, 这需要对空间部分求迹. 首先将其中的 $|\varphi_0(t)\rangle$ 和 $|\varphi_1(t)\rangle$ 在动量空间中表示为

$$|\varphi_0(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(p_z, t) |p_z\rangle dp_z$$

$$|\varphi_1(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(p_z, t) |p_z\rangle dp_z$$

然后写出整体量子态的密度矩阵 $\Psi(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$, 具体形式是 (以下积分一律从 $-\infty$ 积到 $+\infty$)

$$\begin{aligned} \Psi(t) = & |c_0|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes \iint \varphi_0(p'_z, t) \varphi_0^*(p''_z, t) |p'_z\rangle\langle p''_z| dp'_z dp''_z \\ & + c_0 c_1^* |0\rangle\langle 1| \otimes \iint \varphi_0(p'_z, t) \varphi_1^*(p''_z, t) |p'_z\rangle\langle p''_z| dp'_z dp''_z \\ & + c_0^* c_1 |1\rangle\langle 0| \otimes \iint \varphi_0^*(p'_z, t) \varphi_1(p''_z, t) |p'_z\rangle\langle p''_z| dp'_z dp''_z \\ & + |c_1|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes \iint \varphi_1(p'_z, t) \varphi_1^*(p''_z, t) |p'_z\rangle\langle p''_z| dp'_z dp''_z \end{aligned}$$

接着, 对上述每一项中直积符号右边的算子求迹. 这是在动量空间中求迹, 面临如下形式的积分,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle p_z | \text{求迹的对象} | p_z \rangle dp_z$$

以 $\Psi(t)$ 的表达式右端第一项为例,

$$\begin{aligned} & \int \langle p_z | \left\{ \iint \varphi_0(p'_z, t) \varphi_0^*(p''_z, t) |p'_z\rangle\langle p''_z| dp'_z dp''_z \right\} | p_z \rangle dp_z \\ & = \iiint \varphi_0(p'_z, t) \varphi_0^*(p''_z, t) \delta(p_z - p'_z) \delta(p_z - p''_z) dp_z dp'_z dp''_z \\ & = \int \varphi_0(p_z, t) \varphi_0^*(p_z, t) dp_z = 1 \end{aligned}$$

令

$$I_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(p_z, t) \varphi_j^*(p_z, t) dp_z, \quad i, j = 0, 1$$

显然, $I_{ij}(t) = I_{ji}^*(t)$. 考虑到 $\varphi_0(p_z, t)$ 和 $\varphi_1(p_z, t)$ 的归一性, 有 $I_{00}(t) = I_{11}(t) = 1$, 故自旋部分的量子态 $\rho^{\text{Spin}}(t)$ 表示为

$$\rho^{\text{Spin}}(t) = \text{Tr}_{\text{space}} \Psi(t) = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* I_{01}(t) \\ c_0^* c_1 I_{10}(t) & |c_1|^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

可以看到, 在测量过程中, 系统量子态的变化表现在密度矩阵的非对角元上.

理想情形 理想情形指的是 (7) 式中两个空间部分的量子态 $|\varphi_0\rangle$ 和 $|\varphi_1\rangle$ 彼此正交, 或者说, 两个动量空间中的波函数 $\varphi(p_z + gt)$ 和 $\varphi(p_z - gt)$ 之间没有重叠. 虽然实际上它们是有重叠的, 但是, 如果我们令 gt 很大, 那么这两个波包距离很远, 其间的重叠就很小, 即

$$\langle \varphi_0 | \varphi_1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(p_z - gt) \varphi(p_z + gt) dp_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(p_z - gt) \varphi(p_z + gt) dp_z \approx 0$$

可以说它们近乎正交. 这时, $|\Psi(t)\rangle$ 式和以前讨论过的最优形式在本质上是一样的.

如果观测到粒子的动量的值 $p_z > 0$, 那么这个观测结果的来源应该是 $\varphi(p_z - gt)$, 由此可以推知粒子的自旋量子态处于 $|0\rangle$, 且 σ_z 取值 $+1$; 类似地, 如果观测到 $p_z < 0$, 那么其自旋量子态处于 $|1\rangle$, 且 σ_z 取值 -1 . 注意到 $\varphi(p_z - gt)$ 基本上完全分布在 p_z 的右半轴, 而 $\varphi(p_z + gt)$ 基本上完全分布在 p_z 的左半轴. 因此在 (7) 中, 粒子的动量大于零的几率是

$$\text{Prob}(p_z > 0) = \int_0^{+\infty} |c_0|^2 |\varphi(p_z - gt)|^2 dp_z = |c_0|^2$$

同样地, 动量小于零的几率是 $\text{Prob}(p_z < 0) = |c_1|^2$. 再次重现了自旋量子态 $|\psi\rangle$ 中 σ_z 取值 ± 1 的几率. 而且还需注意到, 理想情况下测量后粒子的密度矩阵是对角的, 即 (9) 式中非对角项变为零.

虽然看起来通过增大 gt 以减小动量波函数的重叠这一做法是可行的, 但是也要注意, 当相互作用强度 g 给定的时候, 延长相互作用的时间 t 会让系统受到更多的来自周围环境的干扰. 在实际情况中, 两个动量波函数难免会有部分重叠, 这将导致模糊测量.

非理想测量 如果在 t 时刻粒子的整体量子态 $|\Psi(t)\rangle$ 中的动量波函数 $\phi(p_z \pm gt)$ 有明显的重叠, 并且, 在实验中观测到粒子的动量的值 p_z^{exp} 正好处于两个动量波函数的交叠区域 (如图 3 所示), 那么难以断定动量的这个值是来自于 $\phi(p_z + gt)$ 还是来自于 $\phi(p_z - gt)$. 这种情况就是非理想的测量.

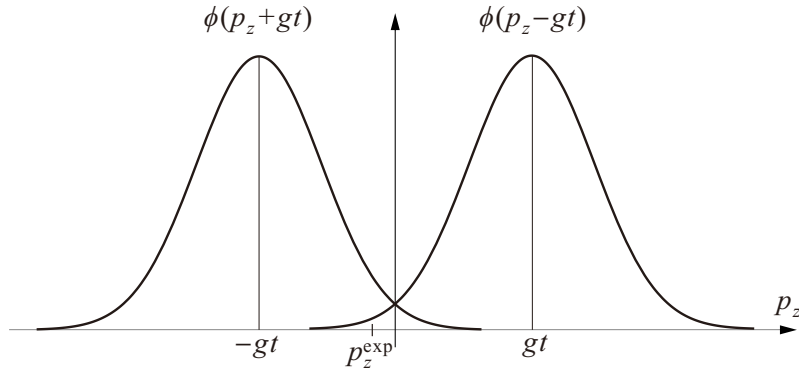


图 3: 非理想测量. 粒子的动量空间中的波函数 $\phi(p_z + gt)$ 和 $\phi(p_z - gt)$ 之间有明显的重叠. 如果观测到的动量的值 p_z^{exp} 处于重叠区域, 则不能断定这是哪一个动量波函数给出的结果.

非理想测量

Peres, A. and Wootters, W. K. Quantum measurements of finite duration. *Physical Review D* **32**, 1968-1974 (1985).

设想, 自旋 1/2 粒子哈密顿量有如下形式 (以下令 $\hbar = 1$),

$$H = v(t)\sigma_z \otimes P$$

在 Heisenberg 图像中,

$$\frac{dQ}{dt} = i[H, Q] = v(t)\sigma_z$$

这相对于说, 当 σ_z 取值 +1 的时候, 粒子的速度为 $v(t)$; 当 σ_z 取值 -1 的时候, 粒子的速度为 $-v(t)$.

粒子的初态

$$|\Psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \varphi(q) \quad (10)$$

考虑 t 时刻的量子态. 注意到在不同的时刻, 哈密顿量是彼此对易的. 于是可以把时间演化算子表示为

$$U(t) = \exp \left\{ -i \int_0^t H(\tau) d\tau \right\} = e^{-iL(t)\sigma_z \otimes P} = \begin{pmatrix} e^{-iL(t)P} & 0 \\ 0 & e^{iL(t)P} \end{pmatrix}$$

其中

$$L(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

写出 t 时刻的量子态,

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha e^{-iL(t)P} \\ \beta e^{iL(t)P} \end{pmatrix} \varphi(q) = \begin{pmatrix} \alpha \varphi(q-L) \\ \beta \varphi(q+L) \end{pmatrix} \quad (11)$$

或者

$$|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \alpha e^{-iL(t)P} \\ \beta e^{iL(t)P} \end{pmatrix} \int dq \varphi(q) |q\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \int dq \varphi(q-L) |q\rangle \\ \beta \int dq \varphi(q+L) |q\rangle \end{pmatrix} \quad (12)$$

也可以写为

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \alpha |0\rangle \otimes \int dq \varphi(q-L) |q\rangle + \beta |1\rangle \otimes \int dq \varphi(q+L) |q\rangle \\ &= \int dq [\alpha \varphi(q-L) |0\rangle \otimes |q\rangle + \beta \varphi(q+L) |1\rangle \otimes |q\rangle] \\ &= \int dq [\alpha \varphi(q-L) |0\rangle + \beta \varphi(q+L) |1\rangle] \otimes |q\rangle \\ &\quad \text{Let } |\eta(q,t)\rangle = \alpha \varphi(q-L) |0\rangle + \beta \varphi(q+L) |1\rangle \\ &= \int dq |\eta(q,t)\rangle \otimes |q\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

量子态与时间的依赖关系体现在 $L = L(t)$,

现在要写出密度矩阵 $\Psi(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. 如果采用 (11) 式, 那么得到一个不正确的表达式

$$\begin{pmatrix} |\alpha|^2 \varphi(q-L) \varphi^*(q-L) & \alpha \beta^* \varphi(q-L) \varphi^*(q+L) \\ \alpha^* \beta \varphi^*(q-L) \varphi(q+L) & |\beta|^2 \varphi(q+L) \varphi^*(q+L) \end{pmatrix} \quad \text{这是不对的}$$

这是因为, 在 (10) 和 (11) 中, $\varphi(q)$ 和 $\varphi(q \pm L)$ 被理解为从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的波函数, 没有明确地指明基向量. 因此, 建议将 $\varphi(q)$ 表示为 $\int \varphi(q) |q\rangle dq$, 将 $\varphi(q \pm L)$ 表示为 $\int \varphi(q \pm L) |q\rangle dq$, 即 (12) 式, 并且在左矢形式中换用另一个积分变量, 即 $\int \varphi^*(q') \langle q'| dq'$ 和 $\int \varphi^*(q' \pm L) \langle q'| dq'$, 从而有

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \iint dq dq' \varphi(q-L) \varphi^*(q'-L) |q\rangle\langle q'| & \alpha \beta^* \iint dq dq' \varphi(q-L) \varphi^*(q'+L) |q\rangle\langle q'| \\ \alpha^* \beta \iint dq dq' \varphi^*(q'-L) \varphi(q+L) |q\rangle\langle q'| & |\beta|^2 \iint dq dq' \varphi(q+L) \varphi^*(q'+L) |q\rangle\langle q'| \end{pmatrix}$$

或者采用 (13) 式, 给出更为简洁的形式,

$$\Psi(t) = \iint dq dq' |\eta(q,t)\rangle\langle\eta(q',t)| \otimes |q\rangle\langle q'| \quad (14)$$

考虑 \mathbb{C}^2 空间中某个力学量 A , 期望值是

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(t) &= \langle \Psi(t) | A \otimes \mathbb{1} | \Psi(t) \rangle \\ &= \left[\int dq \langle \eta(q,t) | \otimes \langle q | \right] (A \otimes \mathbb{1}) \left[\int dq' |\eta(q',t)\rangle \otimes |q'\rangle \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint dq dq' \langle \eta(q, t) | A | \eta(q', t) \rangle \langle q | q' \rangle \\
&= \int dq \langle \eta(q, t) | A | \eta(q, t) \rangle
\end{aligned}$$

设 $A = \sigma_z$, 有

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_z \rangle (t) &= \int [|\alpha|^2 |\varphi(q-L)|^2 - |\beta|^2 |\varphi(q+L)|^2] dq \\
&= |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \langle \sigma_z \rangle (0)
\end{aligned}$$

即 σ_z 的期望值不随时间变化. 应该如此, 因为相互作用哈密顿量的形式是 $\sigma_z \otimes P$, 系统的力学量 σ_z 是守恒量.

再来看相互作用之后粒子的自旋量子态. 对 (14) 的空间部分求迹, 有 $\rho^{\text{Spin}}(t) = \text{Tr}_{\text{Space}} \Psi(t)$,

$$\begin{aligned}
\rho^{\text{Spin}}(t) &= \int dq |\eta(q, t)\rangle \langle \eta(q, t)| \\
&= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* I_{01}(t) \\ \alpha^*\beta I_{10}(t) & |\beta|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$I_{01}(t) = I_{10}^*(t) = \int dq \varphi^*(q-L)\varphi(q+L)$$

当 $\varphi(q-L)$ 和 $\varphi(q+L)$ 重叠很少甚至没有重叠的情况下, $I_{01} = I_{10} = 0$, 粒子自旋量子态的密度矩阵成为对角形式.

提这样的问题:

在区间 $q_1 \leq q \leq q_2$ 内探测到粒子的几率是多少? 如果在该区间内观测到了粒子, 那么粒子的自旋行为如何?

为此, 考虑从 (14) 中写出粒子的空间量子态形式, 即, 对自旋部分求迹.

$$\begin{aligned}
\rho^{\text{Space}}(t) &= \text{Tr}_{\text{Spin}} \rho(t) \\
&= \iint dq dq' \langle 0 | \eta(q, t) \rangle \langle \eta(q', t) | 0 \rangle |q\rangle \langle q'| \\
&\quad + \iint dq dq' \langle 1 | \eta(q, t) \rangle \langle \eta(q', t) | 1 \rangle |q\rangle \langle q'| \\
&= \iint dq dq' |\alpha|^2 \varphi(q-L)\varphi^*(q'-L) |q\rangle \langle q'| \\
&\quad + \iint dq dq' |\beta|^2 \varphi(q+L)\varphi^*(q'+L) |q\rangle \langle q'|
\end{aligned} \tag{17}$$

在区间 $\Delta = [q_1, q_2]$ 内对粒子的位置进行测量, 这一操作对应于投影算子

$$\Pi(\Delta) = \int_{q_1}^{q_2} dq'' |q''\rangle \langle q''|$$

于是相应的几率为 $\text{Prob}(\Delta) = \text{Tr}[\rho^{\text{space}}\Pi(\Delta)]$, 先计算一下 $\rho^{\text{space}}\Pi(\Delta)$,

$$\begin{aligned}\rho^{\text{space}}\Pi(\Delta) &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \iint dq dq' |\alpha|^2 \varphi(q-L) \varphi^*(q'-L) |q\rangle \langle q'|q''\rangle \langle q''| \\ &\quad + \int_{q_1}^{q_2} dq'' \iint dq dq' |\beta|^2 \varphi(q+L) \varphi^*(q'+L) |q\rangle \langle q'|q''\rangle \langle q''| \\ &\quad \text{注意到 } \langle q'|q''\rangle = \delta(q'-q'') \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \int dq |\alpha|^2 \varphi(q-L) \varphi^*(q''-L) |q\rangle \langle q''| \\ &\quad + \int_{q_1}^{q_2} dq'' \int dq |\beta|^2 \varphi(q+L) \varphi^*(q''+L) |q\rangle \langle q''|\end{aligned}\tag{18}$$

然后对上式求迹, 得到几率 $\text{Prob}(\Delta)$.

$$\begin{aligned}\text{Prob}(\Delta) &= \text{Tr}[\rho^{\text{space}}\Pi(\Delta)] \\ &= \int \langle q'| \text{Eq. (18)} |q'\rangle dq' \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \iint dq dq' |\alpha|^2 \varphi(q-L) \varphi^*(q''-L) \langle q'|q\rangle \langle q''|q'\rangle \\ &\quad + \int_{q_1}^{q_2} dq'' \iint dq dq' |\beta|^2 \varphi(q+L) \varphi^*(q''+L) \langle q'|q\rangle \langle q''|q'\rangle \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \left[|\alpha|^2 |\varphi(q''-L)|^2 + |\beta|^2 |\varphi(q''+L)|^2 \right]\end{aligned}\tag{19}$$

另一方面, 我们还可以直接用 $\mathbb{1} \otimes \Pi(\Delta)$ 作用于由 (14) 式给出的 $\Psi(t)$.

$$\begin{aligned}\Pi(\Delta) &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' |q''\rangle \langle q''| = \int_{q_1}^{q_2} dq''' |q'''\rangle \langle q'''\rangle \\ [\mathbb{1} \otimes \Pi(\Delta)] \Psi(t) [\mathbb{1} \otimes \Pi(\Delta)] &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \int_{q_1}^{q_2} dq''' \iint dq dq' [\mathbb{1} \otimes |q''\rangle \langle q''|] [|\eta(q)\rangle \langle \eta(q')| \otimes |q\rangle \langle q'|] [\mathbb{1} \otimes |q'''\rangle \langle q'''\rangle] \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \int_{q_1}^{q_2} dq''' \iint dq dq' |\eta(q)\rangle \langle \eta(q')| \otimes [|q''\rangle \langle q''|q\rangle \langle q'|q'''\rangle \langle q'''\rangle] \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq'' \int_{q_1}^{q_2} dq''' |\eta(q'')\rangle \langle \eta(q''')| \otimes |q''\rangle \langle q'''\rangle \\ &= \int_{q_1}^{q_2} dq \int_{q_1}^{q_2} dq' |\eta(q)\rangle \langle \eta(q')| \otimes |q\rangle \langle q'|\end{aligned}\tag{20}$$

上面最后一个表达式是测量后的未归一的量子态, 对它求迹, 得到在区间 Δ 内探测到粒子的几率,

$$\begin{aligned}\text{Tr}[\text{Eq. (20)}] &= \int dq'' \int_{q_1}^{q_2} dq \int_{q_1}^{q_2} dq' \sum_{i=0}^1 \langle i|\eta(q)\rangle \langle \eta(q')|i\rangle \langle q''|q\rangle \langle q'|q''\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{q_1}^{q_2} dq \int_{q_1}^{q_2} dq' \delta(q - q') \sum_{i=0}^1 \langle i | \eta(q) \rangle \langle \eta(q') | i \rangle \\
&= \int_{q_1}^{q_2} dq \sum_{i=0}^1 \langle i | \eta(q) \rangle \langle \eta(q) | i \rangle = \text{Eq. (19)} = \text{Prob}(\Delta)
\end{aligned}$$

在此前提下 (即在区间 Δ 内探测到粒子), 粒子的未归一的自旋量子态可以在 (20) 式中对空间部分求迹而得到.

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}_{\text{space}} [\text{Eq. (20)}] \\
&= \int dq'' \int_{q_1}^{q_2} dq \int_{q_1}^{q_2} dq' |\eta(q)\rangle\langle\eta(q')| \langle q'' | q \rangle \langle q' | q'' \rangle \\
&= \int_{q_1}^{q_2} dq \int_{q_1}^{q_2} dq' \delta(q - q') |\eta(q)\rangle\langle\eta(q')| \\
&= \int_{q_1}^{q_2} dq |\eta(q)\rangle\langle\eta(q)|
\end{aligned}$$

归一化之后, 得到

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta, t) = \frac{1}{p(\Delta)} \int_{q_1}^{q_2} dq |\eta(q)\rangle\langle\eta(q)|$$

- 在 $t = 0$ 时, $L = 0$,

$$p(\Delta) = \int_{q_1}^{q_2} dq |\varphi(q)|^2$$

$$|\eta(q, 0)\rangle = (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \varphi(q)$$

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta, 0) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

- 如果时间足够长, L 很大, 两个波函数 $\varphi(q-L)$ 和 $\varphi(q+L)$ 相距很远, 可视为彼此正交. 而且, $|\varphi(q-L, t)|^2$ 在 q 的正半轴上的积分为 1, 在 q 的负半轴上积分为零, 而 $|\varphi(q+L, t)|^2$ 的积分结果正好相反. 考虑 q 的正半轴, 即 $\Delta = [0, +\infty)$.

$$p(\Delta) = \int_0^{+\infty} dq [|\alpha|^2 |\varphi(q-L)|^2 + |\beta|^2 \underbrace{|\varphi(q+L)|^2}_{\text{积分为零}}] = |\alpha|^2$$

此时, 粒子的自旋量子态是

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta) = \frac{1}{|\alpha|^2} \int_0^{+\infty} |\eta(q)\rangle\langle\eta(q)| dq$$

逐项计算 $|\eta(q)\rangle\langle\eta(q)|$ 的矩阵元对 q 的积分, 发现只有 $|\alpha|^2$ 是非零的, 其值为 1, 所以

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0|$$

这个结果正是理想测量的体现 —— 只要在 q 的正半轴上探测到粒子, 那么该粒子的自旋角动量的指向一定是正 z 方向.

现在讨论不那么好的测量过程 —— $\varphi(q \pm L)$ 没有分得很开. 为了易于计算, 作如下假设.

- 粒子初态中的位置波函数采用简单的形式 (虽然有些不合理),

$$\varphi(q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2a}}, & q \in [-a, a] \\ 0, & \text{其它区域} \end{cases}$$

- 在哈密顿量 $H = v(t)\sigma_z \otimes P$ 中, 将 $v(t)$ 设定为常数, 不随时间变化, 于是 $L = vt$. 当 $L \geq a$ 时, $\varphi(q \pm L)$ 彼此没有重叠, 为理想测量. 而现在要考虑 $L < a$ 的情形.
- 粒子初态中的自旋量子态设为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

先算一下在区间 $\Delta = [0, +\infty)$ 内探测到粒子的几率.

$$\begin{aligned} \text{Prob}(\Delta) &= \int_0^{+\infty} dq [|\alpha|^2 |\varphi(q-L)|^2 + |\beta|^2 |\varphi(q+L)|^2] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2a} (a+L) + \frac{1}{2} \frac{1}{2a} (a-L) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

虽然这个几率等于在系统初态 $|\psi\rangle$ 中测量 σ_z 得到结果 $+1$ 的几率, 但是, 在目前非理想的情形下, 与测量结果 Δ 对应的自旋量子态不是 $|0\rangle$, 而是

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+b & 1-b \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \quad (21)$$

其中 $b = \frac{L}{a} < 1$.

如果系统的纯态不是 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, 那么未必有 $\text{Prob}(\Delta) = |\langle 0|\psi\rangle|^2$.

把 $\rho_{\text{spin}}(\Delta)$ 表示为

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + (1-b)\sigma_x + b\sigma_z)$$

Bloch 向量是

$$\mathbf{r} = (1-b, 0, b)$$

还可以考虑由 (21) 式给出的 $\rho_{\text{spin}}(\Delta)$ 的本征值及本征向量. 用 w_1 和 w_2 表示本征值, 用 P_1 和 P_2 表示相应的本征向量的密度矩阵, 即

$$\rho_{\text{spin}}(\Delta) = w_1 P_1 + w_2 P_2$$

分别用 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 表示密度矩阵 P_1 和 P_2 的 Bloch 向量. 当然应该有 $\mathbf{r} = w_1 \mathbf{r}_1 + w_2 \mathbf{r}_2$.

图 4 描绘了 $w_1 \mathbf{r}_1$ 和 $w_2 \mathbf{r}_2$ 随 b 的变化, 实际上也就是随时间的变化.

需要说明的是, 图 4 并没有描绘粒子的自旋量子态随时间演化的过程. 上述计算结果以及这个图像有这样一个前提: 在区间 Δ 内探测到了粒子.

粒子的自旋量子态随时间演化的过程已经由 (16) 式确定了.

使用连续变量的测量仪器

系统的被测力学量 A 的本征值是离散的, 系统的初态是 ρ_{in} , 描述系统的 Hilbert 空间是 \mathcal{H}^Q .

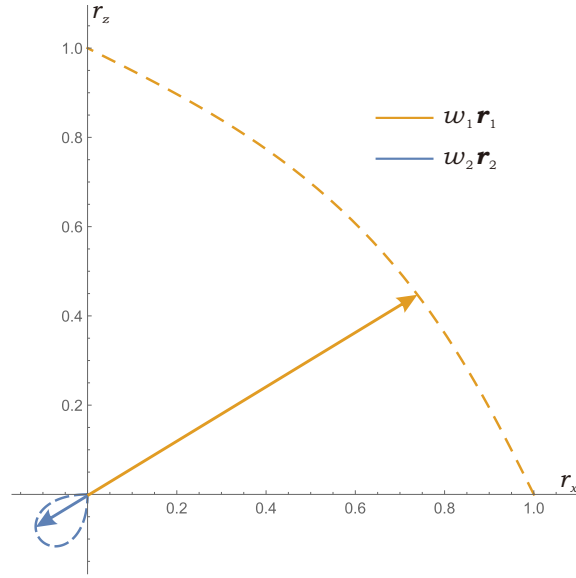


图 4

描述仪器的 Hilbert 空间是 \mathcal{H}^M , 这是连续的 Hilbert 空间. 测量仪器的初态设为纯态 $\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. 系统与仪器之间的相互作用设为

$$H(t) = g(t)A \otimes P$$

其中 P 是仪器的动量, 这里只分析一维运动.

时间演化算子是

$$U(t) = \exp\left(\frac{g}{i\hbar}A \otimes P\right), \quad g = \int_0^t dt' g(t')$$

我们用仪器的空间位置 X 作为“指针”. 在 Heisenberg 图像中, 系统的被测力学量 A 不随时间变化.

在 Heisenberg 图像中, 仪器的位置随时间的变化是

$$(\mathbb{1} \otimes X)(t) = \mathbb{1} \otimes X + gA \otimes \mathbb{1} \quad (22)$$

期望值

$$\langle X(t) \rangle = \langle X(0) \rangle + g \langle A(0) \rangle \quad (23)$$

这里

$$\langle X(0) \rangle = \langle \varphi | X | \varphi \rangle, \quad \langle A(0) \rangle = \text{Tr}(\rho_{in} A)$$

这些期望值都是相对于初始时刻的量子态而言的. 而对于 $\langle X(t) \rangle$, 如果也这么说, 那么就可能把它的期望值表示为 $\langle X(t) \rangle = \langle \varphi | X(t) | \varphi \rangle$. 这个形式是错误的, 因为系统和仪器之间有相互作用, 仪器的空间位置力学量 X 的演化不仅仅是仪器自身的事情, 而是与系统有关, 它的演化过程由 (22) 决定.

在 Schrödinger 图像中, 仪器的位置算子 X 不随时间变化, 在 t 时刻, 期望值是 $\langle X \rangle(t) = \text{Tr}(X\rho^M(t))$, 其中 $\rho^M(t)$ 是 t 时刻仪器的量子态,

$$\rho^M(t) = \text{Tr}_Q \rho^{QM}(t)$$

$$\rho^{QM}(t) = U(t)(\rho_{in} \otimes \varphi)U^\dagger(t)$$

现在, 我们考虑如下内容:

- t 时刻整体的量子态 $\rho^{QM}(t)$, 以及系统和仪器的约化密度算子 $\rho^Q(t)$ 和 $\rho^M(t)$.
- 系统演化过程中的 Kraus 算子.
- 在 t 时刻仪器的观测量 X 的期望值.

计算 $\rho^{QM}(t)$

$$\begin{aligned}\rho^{QM}(t) &= \exp\left(\frac{-ig}{\hbar}A \otimes P\right)(\rho_{in} \otimes \varphi)\exp\left(\frac{ig}{\hbar}A \otimes P\right) \\ &= \rho_{in} \otimes \varphi + \frac{-ig}{\hbar}[A \otimes P, \rho_{in} \otimes \varphi] + \dots\end{aligned}$$

如果系统的初态是纯态, 那么容易写出 $\rho^{QM}(t)$ 的具体形式. 如果系统的初态是混合态, 那么 $\rho^{QM}(t)$ 的一般形式不容易写出, 但是可以得到 $\rho^Q(t)$ 和 $\rho^M(t)$.

计算 $\rho^Q(t)$

$$\begin{aligned}\rho^Q(t) &= \text{Tr}_M \rho^{QM}(t) \\ &= \rho_{in} + \frac{-ig}{\hbar} \text{Tr}_M(A\rho_{in} \otimes P\varphi - \rho_{in}A \otimes \varphi P) + \dots \\ &= \rho_{in} + \frac{-ig}{\hbar} \langle P \rangle_0 [A, \rho_{in}] + \frac{1}{2!} \left(\frac{-ig}{\hbar}\right)^2 \langle P^2 \rangle_0 [A, [A, \rho_{in}]] + \dots\end{aligned}\quad (24)$$

其中 $\langle P^k \rangle_0 = \text{Tr}(P^k \varphi)$ 是仪器的动量算子的 k 次方 P^k 在仪器的初态 φ 中的期望值, $\rho^Q(t)$ 与时间的依赖关系被包含在 g 中.

Kraus 算子 系统量子态的演化又可以用 Kraus 算子描述. 仪器的初态是纯态 $|\varphi\rangle$, 仪器的位置算子将体现经典层面上的现象, Kraus 算子是

$$\begin{aligned}K_x &= \langle x|U|\varphi\rangle = \langle x|\exp\left(\frac{-ig}{\hbar}A \otimes P\right)|\varphi\rangle \\ &= \langle x|\left[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \frac{-ig}{\hbar}A \otimes P + \frac{1}{2!}\left(\frac{-ig}{\hbar}\right)^2 A^2 \otimes P^2 + \dots\right]|\varphi\rangle \\ &= \mathbb{1}\varphi(x) + \frac{-ig}{\hbar}A \langle x|P|\varphi\rangle + \frac{1}{2!}\left(\frac{-ig}{\hbar}\right)^2 A^2 \langle x|P^2|\varphi\rangle + \dots \\ &= \sum_j \varphi(x - ga_j) |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|\end{aligned}$$

在 A 表象中, Kraus 算子是对角形式.

效果算子 (或者说几率算子) 的形式也是对角的,

$$E_x = K_x^\dagger K_x = \sum_j |\varphi(x - ga_j)|^2 |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|\quad (25)$$

用 Kraus 算子作用于系统的初态 ρ_{in} ,

$$\begin{aligned}
\rho^{\mathcal{Q}}(t) &= \int dx K_x \rho_{in} K_x^\dagger \\
&= \int dx \sum_{j,k} \varphi(x - ga_j) \varphi^*(x - ga_k) |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j| \rho_{in} |\alpha_k\rangle\langle\alpha_k| \\
&= \sum_{j,k} \int dx \varphi(x - ga_j) \varphi^*(x - ga_k) (\rho_{in})_{jk} |\alpha_j\rangle\langle\alpha_k|
\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $(\rho_{in})_{jk}$ 是 ρ_{in} 的矩阵元. (26) 式表明, 相比于 $t = 0$ 时刻, 在 t 时刻系统的量子态的密度矩阵的矩阵元多了一个因子

$$\int dx \varphi(x - ga_j) \varphi^*(x - ga_k)$$

下面证明 $\rho^{\mathcal{Q}}(t)$ 的两个表达式 (24) 和 (26) 是相等的.

(26) 式给出的 $\rho^{\mathcal{Q}}(t)$ 的矩阵元是

$$\int dx \varphi(x - ga_j) \varphi^*(x - ga_k) (\rho_{in})_{jk}$$

再来看 (24) 式给出的矩阵元,

$$\begin{aligned}
&(\rho_{in})_{jk} + \frac{-ig}{\hbar} \langle P \rangle_0 \langle \alpha_j | [A, \rho_{in}] | \alpha_k \rangle + \frac{1}{2!} \left(\frac{-ig}{\hbar} \right)^2 \langle P^2 \rangle_0 \langle \alpha_j | [A, [A, \rho_{in}]] | \alpha_k \rangle + \dots \\
&= (\rho_{in})_{jk} + \frac{-ig}{\hbar} \langle P \rangle_0 (a_j - a_k) (\rho_{in})_{jk} + \frac{1}{2!} \left(\frac{-ig}{\hbar} \right)^2 \langle P^2 \rangle_0 (a_j - a_k)^2 (\rho_{in})_{jk} + \dots \\
&= \left[1 + \frac{-ig}{\hbar} \langle P \rangle_0 (a_j - a_k) + \frac{1}{2!} \left(\frac{-ig}{\hbar} \right)^2 \langle P^2 \rangle_0 (a_j - a_k)^2 + \dots \right] (\rho_{in})_{jk} \\
&= \left[\int dx \varphi^*(x) \exp \left\{ -g(a_j - a_k) \frac{d}{dx} \right\} \varphi(x) \right] (\rho_{in})_{jk} \\
&= \left[\int dx \varphi^*(x) \varphi(x - g(a_j - a_k)) \right] (\rho_{in})_{jk} \\
&= \int dx \varphi(x - ga_j) \varphi^*(x - ga_k) (\rho_{in})_{jk}
\end{aligned}$$

所以, 两种表示形式是等价的.

计算 $\rho^M(t)$

$$\begin{aligned}
\rho^M(t) &= \text{Tr}_{\mathcal{Q}} \rho^{\mathcal{Q}M}(t) \\
&= \varphi + \frac{-ig}{\hbar} \langle A \rangle_{in} [P, \varphi] + \left(\frac{-ig}{\hbar} \right)^2 \langle A^2 \rangle_{in} [P, [P, \varphi]] + \dots
\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\langle A^k \rangle_{in} = \text{Tr}(A^k \rho_{in})$.

计算 $\text{Tr}(X \rho^M(t))$ 这需要计算 X 与 (27) 式中的各个对易子相乘后的迹. 我们首先考虑 $\text{Tr}(X [P, \varphi])$.

繁琐过程 $[P, \varphi]$ 在动量表象中的表示

$$\langle p | [P, \varphi] | p' \rangle = \langle p | P | \varphi \rangle \langle \varphi | p' \rangle - \langle p | \varphi \rangle \langle \varphi | P | p' \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= p\varphi(p)\varphi^*(p') - p'\varphi(p)\varphi^*(p') \\
&= (p - p')\varphi(p)\varphi^*(p')
\end{aligned}$$

接着计算 $\text{Tr}(X[P, \varphi])$.

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}(X[P, \varphi]) \\
&= \int dx \, x \langle x | [P, \varphi] | x \rangle \\
&= \iiint dx \, dp \, dp' \, x(p - p')\varphi(p)\varphi^*(p') \langle x | p \rangle \langle p' | x \rangle \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \, x \iint dp \, dp' \, p\varphi(p)\varphi^*(p') e^{ixp/\hbar} e^{-ixp'/\hbar} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \, x \iint dp \, dp' \, p'\varphi(p)\varphi^*(p') e^{ixp/\hbar} e^{-ixp'/\hbar} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, x\varphi^*(x) \left[(-i\hbar) \frac{d}{dx} \int dp \, \varphi(p) e^{ixp/\hbar} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, x\varphi(x) \left[(i\hbar) \frac{d}{dx} \int dp' \, \varphi^*(p') e^{-ixp'/\hbar} \right] \\
&= (-i\hbar) \int dx \, x\varphi^*(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) - i\hbar \int dx \, x\varphi(x) \frac{d}{dx} \varphi^*(x) \\
&= -i\hbar \int dx \, x \frac{d|\varphi(x)|^2}{dx} \\
&= -i\hbar x |\varphi(x)|^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar \int dx \, |\varphi(x)|^2 = i\hbar
\end{aligned}$$

上式的最后一步需要

$$x|\varphi(x)|^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

简单的过程 实际上, 不需要如此繁琐的过程计算.

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}(X[P, \varphi]) \\
&= \text{Tr}(XP\varphi) - \text{Tr}(X\varphi P) \\
&= \text{Tr}([X, P]\varphi) = i\hbar
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\text{Tr}(X[P, [P, \varphi]]) = 0$$

以及其它的

$$\text{Tr}(X[P, [P, \dots [P, \varphi] \dots]]) = 0$$

所以, X 在 $\rho^M(t)$ 中的期望值是

$$\langle X \rangle(t) = \text{Tr}(X\varphi) + g \langle A \rangle_{in}$$

这也就是 (23) 式所示的结果.

最后做个比较. 系统的被测力学量是 $A = \sum_{j=1}^n a_j |\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|$.

- 描述测量仪器的 Hilbert 空间是离散的.

$$|\alpha_j\rangle \otimes |\varphi\rangle \longrightarrow |\alpha_j\rangle \otimes |\varphi_j\rangle$$

如果各个 $|\varphi_j\rangle$ 彼此正交, 那么测量是理想的, 否则是非理想的.

- 描述测量仪器的 Hilbert 空间是连续的.

$$\begin{aligned} |\alpha_j\rangle \otimes |\varphi\rangle &= |\alpha_j\rangle \otimes \int dx \varphi(x) |x\rangle \\ &\longrightarrow |\alpha_j\rangle \otimes \int dx \varphi(x - ga_j) |x\rangle \end{aligned}$$

如果各个波函数 $\varphi(x - ga_j)$ 没有重叠, 彼此正交, 那么测量是理想的, 否则是非理想的.