

## 第五章 两体量子系统 II

### 开放量子系统的演化

系统  $Q$  和仪器  $M$  的 Hilbert 空间分别记作  $\mathcal{H}^Q$  和  $\mathcal{H}^M$ . 考虑有限维情形,  $\mathcal{H}^Q$  的维数设为  $n$ ,  $\mathcal{H}^M$  的维数应该至少为  $n$ , 暂时设为  $n$ . 设系统和仪器的初态均为纯态, 它们分别是  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^Q$  和  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}^M$ , 二者整体的初态是直积态  $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \in \mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^M$ . 在  $t$  时刻的整体的量子态  $|\Psi(t)\rangle$  是由酉变换  $U(t)$  决定的,

$$|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle = U(t)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)$$

也可以用密度矩阵表示. 令  $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ ,  $\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ ,  $\Psi(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$ ,  $\Psi(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ , 有

$$\Psi(t) = U(t)\Psi(0)U^\dagger(t) = U(t)(\psi \otimes \varphi)U^\dagger(t)$$

于是, 系统的  $t$  时刻的量子态是

$$\rho^Q(t) = \text{Tr}_M \Psi(t) \quad (1)$$

如图 1 所示.

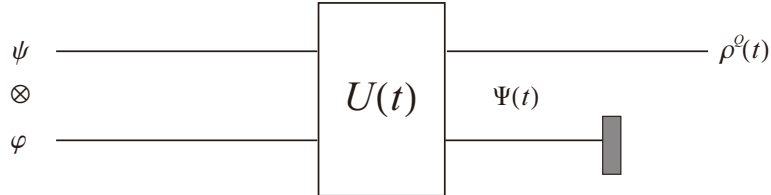


图 1

虽然 (1) 式已经能够告诉我们  $t$  时刻系统的状态, 但是这个形式本身还可以继续运算下去. 设  $\mathcal{H}^M$  的基向量是  $|\mu\rangle$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , 它们可以是自然基向量, 也可以是某个非简并力学量的本征向量. 为了使计算  $\text{Tr}_M \Psi(t)$  的过程更清晰, 我们把酉变换  $U(t)$  表示为

$$U(t) = \sum_{\mu, \nu=0}^{n-1} u_{\mu\nu} \otimes |\mu\rangle\langle\nu|$$

注意这里的  $u_{\mu\nu}$  是  $\mathcal{H}^Q$  上的  $n \times n$  的矩阵, 而不是矩阵元. 由于  $U(t)$  是酉矩阵,  $u_{\mu\nu}$  须满足

$$\sum_{\nu} u_{\mu\nu} u_{\mu'\nu}^\dagger = \delta_{\mu\mu'} \mathbb{1}^Q, \quad \sum_{\mu} u_{\mu\nu}^\dagger u_{\mu\nu} = \delta_{\nu\nu'} \mathbb{1}^Q \quad (2)$$

这里  $\mathbb{1}^Q$  是  $\mathcal{H}^Q$  上的单位矩阵.

在  $t$  时刻两体系统整体量子态的密度矩阵是

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= U(t)(\psi \otimes \varphi)U^\dagger(t) \\ &= \sum_{\mu\nu\mu'v'} (u_{\mu\nu}\psi u_{\mu'v'}^\dagger) \otimes (|\mu\rangle\langle\nu|\varphi|v'\rangle\langle\mu'|)\end{aligned}\quad (3)$$

在空间  $\mathcal{H}^M$  上求迹, 有

$$\mathrm{Tr}_M \Psi(t) = \sum_{\mu\nu v'} (u_{\mu\nu}\psi \hat{u}_{\mu'v'}^\dagger) \langle\nu|\varphi\rangle \langle\varphi|v'\rangle$$

关注上式中的  $\sum_{\nu} u_{\mu\nu} \langle\nu|\varphi\rangle$ , 注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_M [U(\mathbb{1} \otimes |\varphi\rangle\langle\mu|)] &= \mathrm{Tr}_M \left[ \sum_{\mu'v'} (u_{\mu'v'} \otimes |\mu'\rangle\langle v'|)(\mathbb{1} \otimes |\varphi\rangle\langle\mu|) \right] \\ &= \sum_{v'} u_{\mu v'} \langle v'|\varphi\rangle = \sum_{\nu} u_{\mu\nu} \langle\nu|\varphi\rangle\end{aligned}$$

上面的最后一步只是求和指标的替换. 现在令

$$K_\mu = \sum_{\nu} u_{\mu\nu} \langle\nu|\varphi\rangle = \mathrm{Tr}_M [U(\mathbb{1} \otimes |\varphi\rangle\langle\mu|)] = \langle\mu|U|\varphi\rangle\quad (4)$$

上式最后一个表达式是简化的写法:  $U$  是  $\mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^M$  上的酉矩阵, 而  $|\mu\rangle$  和  $|\varphi\rangle$  是  $\mathcal{H}^M$  中的态矢量,  $\langle\mu|U|\varphi\rangle$  中涉及的内积仅仅是  $\mathcal{H}^M$  中向量之间的内积, 结果得到  $\mathcal{H}^Q$  上的矩阵, 即  $K_\mu$ . 而  $K_\mu$  的厄密共轭形式是

$$K_\mu^\dagger = \sum_{\nu} u_{\mu\nu}^\dagger \langle\varphi|\nu\rangle = \mathrm{Tr}_M [U^\dagger(\mathbb{1} \otimes |\mu\rangle\langle\varphi|)] = \langle\varphi|U^\dagger|\mu\rangle\quad (5)$$

综合以上过程以及 (1), 并将系统的初态写为  $\psi = \rho^Q(0)$ , 有

$$\rho^Q(t) = \sum_{\mu=0}^{n-1} K_\mu(t)\rho^Q(0)K_\mu^\dagger(t)\quad (6)$$

算符  $K_\mu$  被称为 Kraus 算符. 可以验证  $\sum_{\mu} K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{1}^Q$ , 即

$$\sum_{\mu} K_\mu^\dagger K_\mu = \sum_{\mu\nu\nu'} u_{\mu\nu}^\dagger u_{\mu\nu} \langle\varphi|\nu'\rangle \langle\nu|\varphi\rangle = \sum_{\nu\nu'} \mathbb{1}^Q \delta_{\nu\nu'} \langle\varphi|\nu'\rangle \langle\nu|\varphi\rangle = \mathbb{1}^Q\quad (7)$$

上面的第二个等式用到了  $\hat{u}_{\mu\nu}$  的条件 (2). Kraus 算符满足  $\sum_{\mu} K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{1}^Q$ , 这意味着系统量子态在演化过程中的迹是不变的 (即保迹演化),

$$\mathrm{Tr} \rho^Q(t) = \mathrm{Tr} \sum_{\mu} K_\mu(t)\rho^Q(0)K_\mu^\dagger(t) = \mathrm{Tr} \sum_{\mu} K_\mu^\dagger(t)K_\mu(t)\rho^Q(0) = \mathrm{Tr} \rho^Q(0)$$

关于系统量子态的演化以及 Kraus 算符, 有以下说明.

1. 我们用两种形式, (1) 和 (6), 描述了系统和仪器有相互作用的情况下系统量子态的演化过程. 它们的共同特征是, 系统和仪器作为一个整体, 在酉变换  $U(t)$  的作用下从初态  $|\Psi(0)\rangle$  演化到  $t$  时刻的  $|\Psi(t)\rangle$ . 然后从  $|\Psi(t)\rangle$  中抛弃与仪器有关的部分 (表现为在  $\mathcal{H}^M$  上求迹), 从而得到  $t$  时刻系统的量子态. 不过这两种形式也是有些区别的. 在 (1) 式的推导过程中, 虽然我们说  $Q$  和  $M$  的初态具有直积态的形式, 即  $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ , 但是最后的结论并没有用到这个条件. 而为了得到 (6) 式, 系统和仪器的初态必须是直积态, 否则不能得到 Kraus 算符. 因此, 在此强调指出, 这里及以后谈到的系统和仪器的初态或者系统与环境的初态一律设为直积态<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> 近年研究涉及了系统和仪器的初态并非直积态的情况下系统的演化过程, 这些内容超出了课程范围, 故不作讨论.

2. 上面的推导过程可以不作任何修改而适用于系统的初态是混合态的情形. 而且, 我们还可以把测量仪器看成是系统周围的环境, 进而用类似的语言描述开放量子系统的演化. 设系统的初态是  $\hat{\rho}(0)$ , 环境的初态是纯态  $\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ . 描述环境的希尔伯特空间的基向量记作  $|\mu\rangle$ . 系统和环境之间从  $t = 0$  时刻开始发生相互作用, 在  $t$  时刻整体的量子态是  $U(t)(\rho(0) \otimes \varphi)U^\dagger(t)$ . 就系统的状态而言, 在时刻  $t$  的量子态可以表示为

$$\rho(t) = \sum_{\mu} K_{\mu}(t)\rho(0)K_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (8)$$

其中 Kraus 算符是

$$K_{\mu}(t) = \langle\mu|U(t)|\varphi\rangle, \quad \sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger}(t)K_{\mu}(t) = \mathbb{1}^{\mathcal{Q}}$$

还可以推广到非保迹的演化过程以及环境的初态是混合态的情形, 在此不作进一步讨论了.

3. 在 (4) 式中, Kraus 算符  $K_{\mu}$  的具体形式依赖于整体的酉变换  $U(t)$ , 仪器的初态以及仪器的 Hilbert 空间  $\mathcal{H}^M$  的基向量, 因此, 选择不同的基向量就会得到不同形式的 Kraus 算符. 设  $\mathcal{H}^M$  的另外一组基向量是  $\{|\alpha\rangle\}$ ,  $\alpha = 0, \dots, n-1$ . 重复以上推导过程, 得到另一组 Kraus 算符, 记作  $J_{\alpha}$ ,

$$J_{\alpha} = \langle\alpha|U|\varphi\rangle$$

注意到两组基向量之间的关系是某个酉矩阵  $V$ , 矩阵元  $v_{\alpha\mu} = \langle\alpha|\mu\rangle$ , 基向量  $|\mu\rangle$  可以用  $|\alpha\rangle$  表示, 即

$$|\mu\rangle = \sum_{\alpha} v_{\alpha\mu} |\alpha\rangle$$

代入 (4) 式,

$$K_{\mu} = \sum_{\alpha} v_{\alpha\mu}^* \langle\alpha|U|\varphi\rangle = \sum_{\alpha} v_{\alpha\mu}^* J_{\alpha}$$

这表明两组 Kraus 算符之间的变换是酉变换. 虽然 Kraus 算符的形式不是唯一的, 但是系统在  $t$  时刻的量子态却是不依赖于  $\mathcal{H}^M$  的基向量的选择, 下面的计算表明了这一点.

$$\begin{aligned} \rho^{\mathcal{Q}}(t) &= \sum_{\mu} K_{\mu}\rho^{\mathcal{Q}}(0)K_{\mu}^{\dagger} \\ &= \sum_{\mu\alpha\alpha'} v_{\alpha\mu}^* v_{\alpha'\mu} J_{\alpha}\rho^{\mathcal{Q}}(0)J_{\alpha'}^{\dagger} \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \left( \sum_{\mu} v_{\alpha\mu}^* v_{\alpha'\mu} \right) J_{\alpha}\rho^{\mathcal{Q}}(0)J_{\alpha'}^{\dagger} \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha'} J_{\alpha}\rho^{\mathcal{Q}}(0)J_{\alpha'}^{\dagger} = \sum_{\alpha} J_{\alpha}\rho^{\mathcal{Q}}(0)J_{\alpha}^{\dagger} \end{aligned}$$

4. 式 (6) 或者 (8) 描述了较为一般的情形下量子态的演化. 有两个极端情形值得一提. 一是酉演化, 此时所有的  $K_{\mu}$  等于某个作于系统的酉变换  $U^{\mathcal{Q}}(t)$ , 于是得到我们熟悉的

$$\rho^{\mathcal{Q}}(t) = U^{\mathcal{Q}}(t)\rho^{\mathcal{Q}}(0)(U^{\mathcal{Q}}(t))^{\dagger}$$

另一个是投影测量, 此时 Kraus 算符就是投影算符  $\Pi_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ , 这里设  $|\alpha_i\rangle$  是系统的某个力学量  $A$  的本征向量. 于是, 测量后系统的状态是

$$\rho^{\mathcal{Q}}(t) = \sum_i \Pi_i \rho^{\mathcal{Q}}(0) \Pi_i = \sum_{\mu} \langle\alpha_i|\rho^{\mathcal{Q}}(0)|\alpha_i\rangle |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \quad (9)$$

这是对测量后对结果不作任何选择的情况下系统的状态. 可以看出, 在基向量  $|\alpha_i\rangle$  上  $\rho^{\mathcal{Q}}(t)$  具有对角形式, 非对角的相干项全都消失为零.

## 几个典型的量子演化过程

有必要先介绍一下等距变换 (isometry). 酉变换  $U$  作用系统和仪器的初态, 使得

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \longrightarrow U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle)$$

设仪器的初态  $|\phi\rangle$  是固定不变的, 仅仅关注系统量子态的改变, 有

$$|\psi\rangle \longrightarrow U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) \quad (10)$$

这是一个从空间  $\mathcal{H}^Q$  到空间  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^M$  的变换, 记作  $V$ . 设系统的希尔伯特空间的基向量是  $|i\rangle$ , 变换  $V$  的作用效果是

$$|i\rangle \xrightarrow{V} |\Omega_i\rangle \equiv U(|i\rangle \otimes |\phi\rangle) \in \mathcal{H} \quad (11)$$

变换  $V$  保证了变换前后量子态的正交归一性, 即

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \xrightarrow{V} \langle \Omega_i|\Omega_j\rangle = \delta_{ij}$$

可以写出变换  $V$  的矩阵形式

$$V = \sum_i |\Omega_i\rangle \langle i| \quad (12)$$

这是一个  $d^{QM} \times d^Q$  的矩阵, 这里  $d^{QM}$  和  $d^Q$  分别是  $\mathcal{H}^{QM}$  和  $\mathcal{H}^Q$  的维数. 容易验证

$$V^\dagger V = \mathbb{1}^Q \quad (13)$$

$\mathbb{1}^Q$  是  $\mathcal{H}^Q$  上的单位矩阵, 故  $V$  是等距变换 (isometry). 需注意到  $VV^\dagger \neq \mathbb{1}^M$ , 这里  $\mathbb{1}^M$  是  $\mathcal{H}^M$  上的单位矩阵.

引入等距变换之后, 系统量子态的演化被简写为

$$\psi \longrightarrow \Psi = V\psi V^\dagger \quad (14)$$

接着还需要对  $\Psi$  在  $\mathcal{H}^M$  上求迹,  $\mathcal{H}^M$  的基向量依旧记作  $|\mu\rangle$ ,

$$\psi \longrightarrow \Psi = V\psi V^\dagger \longrightarrow \rho = \sum_\mu \langle \mu| V\psi V^\dagger |\mu\rangle$$

定义 Kraus 算符

$$K_\mu = \langle \mu| V = \sum_i \langle \mu|\Omega_i\rangle \langle i|$$

这里,  $\langle \mu|\Omega_i\rangle$  涉及  $\mathcal{H}^M$  上的内积, 其结果是  $\mathcal{H}^Q$  上的右矢. 容易验证  $\sum_\mu K_\mu^\dagger K_\mu = \mathbb{1}^Q$ . 另外, 还应该注意到, 虽然 (14) 式说的是系统的纯态在等距变换后的结果, 但是同样适用于混合态,

$$\rho^Q \longrightarrow \rho = V\rho^Q V^\dagger$$

当系统和仪器的整体的酉变换难以表述或者不需要有明确表示的时候, 可以利用等距变换很方便地写出 Kraus 算符.

### 相位阻尼 (phase damping)

相位阻尼过程指的是, 演化过程中量子系统和环境的相互作用使得量子态的相干性逐渐消失, 但是没有带来系统的能量的损失. 描述环境的希尔伯特空间  $\mathcal{H}^E$  的维数是相当大的, 但是在这个简单的模型中, 我们只需要用到环境的无激发的状态 (可以视作基态, 记作  $|0^E\rangle$ ) 和仅有一个激发的状态 (可以视作第一激发态, 记作  $|1^E\rangle$ ). 并且假设初始时刻环境处于基态  $|0^E\rangle$ . 双值系统的基态和第一激发态分别记作  $|0^Q\rangle$  和  $|1^Q\rangle$ . 系统和环境之间相互作用的唯象的效果是

$$|0^Q\rangle |0^E\rangle \longrightarrow |\Omega_0\rangle = |0^Q\rangle |0^E\rangle \quad (15)$$

$$|1^Q\rangle |0^E\rangle \longrightarrow |\Omega_1\rangle = \sqrt{1-p} |1^Q\rangle |0^E\rangle + \sqrt{p} |1^Q\rangle |1^E\rangle \quad (16)$$

这里  $p \in [0, 1]$ . 可以看到, 系统和仪器之间没有能量交换. 再者, 上面两个方程不足以给出整体酉变换的具体形式, 于是考虑等距变换  $V$ ,

$$V = |\Omega_0\rangle\langle 0^Q| + |\Omega_1\rangle\langle 1^Q|$$

Kraus 算符

$$K_0 = \langle 0^E | V = |0^Q\rangle\langle 0^Q| + \sqrt{1-p} |1^Q\rangle\langle 1^Q| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \langle 1^E | V = \sqrt{p} |1^Q\rangle\langle 1^Q| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}$$

设系统的初态是  $\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ , 这里  $\mathbb{1}$  是  $2 \times 2$  单位阵,  $\mathbf{r}$  是 Bloch 向量,  $\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ . 相位阻尼对  $\rho$  的影响是

$$\rho \longrightarrow \rho' = K_0 \rho K_0^\dagger + K_1 \rho K_1^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

计算结果是

$$r'_x = r \sqrt{1-p} \sin \theta \cos \varphi$$

$$r'_y = r \sqrt{1-p} \sin \theta \sin \varphi$$

$$r'_z = r \cos \theta$$

可以看到, 当  $p$  从 0 增大到 1 的过程中, 布洛赫向量在  $xy$  平面内的分量逐渐减小为零, 最后只剩下始终不变的  $z$  方向上的分量. 当  $p = 1$  时,  $\rho'$  具有对角形式, 相干性完全消失.

### 振幅阻尼 (amplitude damping)

在振幅阻尼过程中, 系统和环境之间的相互作用表现为如下唯象过程

$$|0^Q\rangle |0^E\rangle \longrightarrow |\Omega_0\rangle = |0^Q\rangle |0^E\rangle \quad (17)$$

$$|1^Q\rangle |0^E\rangle \longrightarrow |\Omega_1\rangle = \sqrt{1-p} |1^Q\rangle |0^E\rangle + \sqrt{p} |0^Q\rangle |1^E\rangle \quad (18)$$

上面的第二个方程表明系统和环境之间有能量交换. 等距变换  $V = |\Omega_0\rangle\langle 0^Q| + |\Omega_1\rangle\langle 1^Q|$ , 由此得到 Kraus 算符

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

经过振幅阻尼的作用之后, 系统量子态的布洛赫向量是

$$r'_x = r \sqrt{1-p} \sin \theta \cos \varphi$$

$$r'_y = r \sqrt{1-p} \sin \theta \sin \varphi$$

$$r'_z = p + r(1-p) \cos \theta$$

当  $p = 1$  时, 系统的状态是一个纯态  $|0\rangle\langle 0|$ .

### 退极化 (depolarization)

顾名思义, 退极化过程导致量子态的布洛赫向量的长度逐渐减小, 直至为零, 最终变为最大混合态  $\mathbb{1}/2$ . 设系统的初态是  $\rho$ , 演化过程是

$$\rho \longrightarrow \rho' = p \frac{\mathbb{1}}{2} + (1-p)\rho$$

上式的意思很明确: 系统的状态以几率  $p$  变为最大混合态, 以几率  $1-p$  保持不变. 注意到对于  $\mathbb{C}^2$  上的任意的量子态  $\rho$ , 有

$$\frac{\mathbb{1}}{2} = \frac{1}{4}(\rho + \sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_y \rho \sigma_y + \sigma_z \rho \sigma_z)$$

退极化过程的结果可以改写为

$$\rho' = \left(1 - \frac{3p}{4}\right)\rho + \frac{p}{4}(\sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_y \rho \sigma_y + \sigma_z \rho \sigma_z)$$

由此可以得到 Kraus 算符

$$K_0 = \sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \mathbb{1}, \quad K_1 = \frac{\sqrt{p}}{2} \sigma_x, \quad K_2 = \frac{\sqrt{p}}{2} \sigma_y, \quad K_3 = \frac{\sqrt{p}}{2} \sigma_z \quad (19)$$

虽然量子态的演化可以用 Kraus 算符表示, 但是这并不是一个随时间变化的微分方程. 在随时间作酉演化的情形下, 密度矩阵满足的微分方程是 Schrödinger 方程. 对于非酉演化, 也应该有相应的微分方程描述密度矩阵随时间的变化. 这需要对量子系统和环境进行更详尽的讨论, 而本节的内容只是初步的简述.

## 广义量子测量

让我们从量子系统演化的角度来看量子测量. 系统的初态暂设为纯态  $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ . 用一组 Kraus 算符  $\{K_\mu\}$  表示量子态的保迹的演化,

$$\psi \longrightarrow \rho = \sum_{\mu} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger}, \quad \sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu} = \mathbb{1} \quad (20)$$

一方面, 可以说系统的状态从  $\psi$  到  $\rho$  是一个演化过程, 另一方面, 也可以说这是一个操作过程. 下面阐述其中的操作意义.

### 操作算符和效果算符

让我们换一个视角回顾 Kraus 算符  $K_{\mu}$  的推导过程. 注意到  $\Psi(t)$  是  $t$  时刻系统和仪器的整体量子态的密度矩阵, 设想在这个时刻我们测量仪器的力学量  $M$ , 而且  $M$  的本征值和本征向量分别设为  $m_{\mu}$  和  $|\mu\rangle$ , 即  $M =$

$\sum_{\mu} m_{\mu} |\mu\rangle\langle\mu|$ . 当我们得到结果  $m_{\mu}$  的时候, 仪器的量子态是  $|\mu\rangle$ . 这就是用投影算符  $\Pi_{\mu}^M = |\mu\rangle\langle\mu|$  作用于仪器的结果. 从整体上来看, 就要用  $\mathbb{1}^{\mathcal{Q}} \otimes \Pi_{\mu}^M$  作用于  $\Psi(t)$ , 于是我们有

$$\begin{aligned}\Psi(t) &\longrightarrow (\mathbb{1}^{\mathcal{Q}} \otimes \Pi_{\mu}^M) \Psi(t) (\mathbb{1}^{\mathcal{Q}} \otimes \Pi_{\mu}^M) \\ &= \sum_{\nu\nu'} (u_{\mu\nu} \psi u_{\mu\nu'}^{\dagger}) \otimes \langle\nu|\phi|\nu'\rangle |\mu\rangle\langle\mu| \\ &= (K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger}) \otimes |\mu\rangle\langle\mu|\end{aligned}\quad (21)$$

其中最后一步用到了 (4) 式. 在仪器上得到结果  $m_{\mu}$  的几率是

$$p_{\mu} = \text{Tr} [(\mathbb{1}^{\mathcal{Q}} \otimes \Pi_{\mu}^M) \Psi(t) (\mathbb{1}^{\mathcal{Q}} \otimes \Pi_{\mu}^M)] = \text{Tr}(K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger}) = \text{Tr}(K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu} \psi) \quad (22)$$

令

$$\rho_{\mu} = \frac{1}{p_{\mu}} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} \quad (23)$$

显然,  $\rho_{\mu}$  满足密度算符的定义和性质, 它描述了系统的量子态. 示意图 2 描述了上述过程. 于是, 我们这样描述 (21) 式: 当系统和仪器建立了特定的相互作用并演化为  $\Psi(t)$  之后, 测量仪器的力学量  $M$ , 以几率  $p_{\mu}$  得到结果  $m_{\mu}$ , 此时仪器的状态是  $|\mu\rangle$ , 系统的状态是  $\rho_{\mu}$ . 考虑所有的测量结果, 可以说, 对仪器的测量导致了系统的状态从初态  $\psi$  变成了一个系综  $\{p_{\mu}, \rho_{\mu}\}$ , 该系综的平均量子态是

$$\rho = \sum_{\mu} p_{\mu} \rho_{\mu} = \sum_{\mu} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} \quad (24)$$

这也就是本小节开始的 (20) 式, 但是在这里, 同样形式的方程具有了操作上的涵义. Kraus 算符不仅被用来描述一般情形下系统量子态的演化, 而且还体现了在间接测量的过程中对仪器的操作 (即测量) 所导致的对系统的影响. 正是在这个意义上, 我们把 Kraus 算符  $K_{\mu}$  称为操作算符.

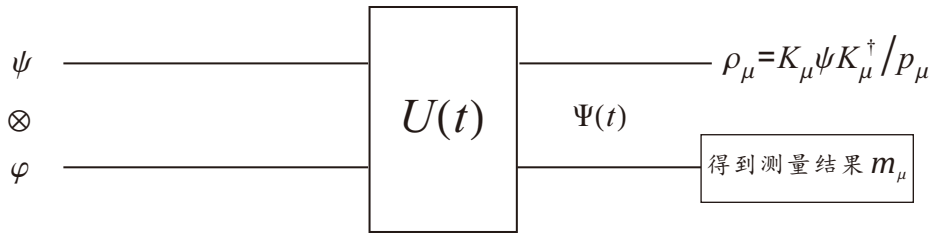


图 2: 广义量子测量

虽然在上面的讨论中, 我们借助测量仪器来描述 Kraus 算符的操作意义, 但是也可以削弱仪器的作用而直接说: 对处于初态  $\psi$  的系统进行某种操作, 操作过程和结果由一组 Kraus 算符  $\{K_{\mu}\}$  决定, 每一个算符  $K_{\mu}$  对应于一个特定的结果  $m_{\mu}$ , 结果  $m_{\mu}$  出现的几率是  $p_{\mu} = \text{Tr}(K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger}) = \text{Tr}(K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu} \psi)$ , 与结果  $m_{\mu}$  对应的量子态是  $K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} / p_{\mu}$ , 考虑所有的结果, 有 (24) 式.

注意几率  $p_{\mu}$  的表达式 (22) 式, 结果  $m_{\mu}$  出现的几率是由  $K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu}$  决定的. 令  $E_{\mu} = K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu}$ , 算符  $E_{\mu}$  是 (半) 正定的, 即  $E_{\mu} \geq 0$ . 在保迹情形下,  $\sum_{\mu} E_{\mu} = \mathbb{1}^{\mathcal{Q}}$ . 我们把  $E_{\mu}$  称为效果算符, 它是 Born 规则在较为一般的情形下的体现, 即  $\text{Tr}(E_{\mu} \psi)$  等于对量子态  $\psi$  进行操作的过程中出现结果  $m_{\mu}$  的几率. 如果对系统的操作是投影测量, 那么一方面

投影算符  $\Pi_i$  是操作算符, 另一方面效果算符  $E_i = \Pi_i^\dagger \Pi_i = \Pi_i$ , 这时操作算符和效果算符是相同的. 但是, 在非理想的情形下, 操作算符和效果算符则显然是不同的. 实际上, 当效果算符给定的时候, 有无穷多种不同的操作算符与之对应. 对于给定的效果算符  $E_\mu$ , 与之对应的操作算符可以是  $K_\mu = E_\mu^{1/2}$ , 也可以是  $K'_\mu = W_\mu E_\mu^{1/2}$ , 这里的  $W_\mu$  是任意的酉算符. 显然,  $E_\mu = E_\mu^{1/2} E_\mu^{1/2} = E_\mu^{1/2} W_\mu^\dagger W_\mu E_\mu^{1/2}$ . 两组不同的操作算符  $\{K_\mu\}$  和  $\{K'_\mu\}$  给出了不同的演化过程

$$\psi \longrightarrow \rho = \sum_{\mu} E_{\mu}^{1/2} \psi E_{\mu}^{1/2} \quad (25)$$

$$\psi \longrightarrow \rho' = \sum_{\mu} W_{\mu} E_{\mu}^{1/2} \psi E_{\mu}^{1/2} W_{\mu}^{\dagger} \quad (26)$$

一般地,  $\rho \neq \rho'$ . 在 (25) 式中, 与结果  $m_\mu$  对应的未归一的量子态是  $E_\mu^{1/2} \psi E_\mu^{1/2}$ . 在 (26) 式中, 与结果  $m_\mu$  对应的未归一的量子态是  $W_\mu E_\mu^{1/2} \psi E_\mu^{1/2} W_\mu^\dagger$ , 二者相差一个酉变换  $W_\mu$ . 虽然演化过程并不相同, 但是从效果上看, 与操作算符对应的结果出现的几率是相同的, 均为  $\text{Tr}(E_\mu \psi)$ .

## 广义测量

**定义 (广义测量)** 广义量子测量用一组效果算符  $\{E_\mu\}$  来描述.  $E_\mu$  是半正定的, 即  $E_\mu \geq 0$ , 且  $\sum_{\mu} E_\mu = \mathbb{1}$ , 这里  $\mathbb{1}$  是系统的量子态  $\rho$  所在的 Hilbert 空间上的单位算符. 与效果算符  $E_\mu$  对应的测量结果记作  $m_\mu$ , 得到该结果的几率等于  $\text{Tr}(E_\mu \rho)$ .

在上述定义中, 对效果算符的要求只有两个: 一个是半正定性, 另一个是效果算符的和等于单位算符. 而对效果算符的个数并无限制. 效果算符的集合  $\{E_\mu\}$  构成了单位算符  $\mathbb{1}$  的正值算符分解, 故也被称为**正值算符测度** (positive operator valued measure), 简称 POVM. 以下, 我们通过两个简单的例子来说明广义测量.

### 2 ⊗ 2 测量模型

作为第一个例子, 考虑最简单的测量模型. 设两个自旋 1/2 粒子 (系统  $Q$  和仪器  $M$ ) 的初态是  $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |x+\rangle = (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) \otimes |x+\rangle$ , 整体的随时间演化的酉变换是  $U(t) = e^{igt(\sigma_z \otimes \sigma_y)}$ . 在  $t$  时刻整体的量子态  $|\Psi(t)\rangle = U(t) |\Psi(0)\rangle$ . 在  $t$  时刻测量仪器的力学量  $\sigma_z^M$ , 可能得到的结果是 +1 和 -1, 仪器的相应的量子态分别是  $|0\rangle$  和  $|1\rangle$ . 根据 (4) 式, 可以得到 Kraus 算符  $K_0$  和  $K_1$ .

$$K_0 = \text{Tr}_M[U(\mathbb{1} \otimes |x+\rangle\langle 0|)] = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} - gt) & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{4} - gt) \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \text{Tr}_M[U(\mathbb{1} \otimes |x+\rangle\langle 1|)] = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4} + gt) & 0 \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{4} + gt) \end{pmatrix}$$

如果  $gt$  不等于  $\frac{\pi}{4}$  的奇数倍, 那么  $K_0$  和  $K_1$  的秩为 2, 不可能是投影测量算符, 而是广义测量算符, 此时系统的量子态的演化是

$$\psi \longrightarrow \rho^Q = K_0 \psi K_0^\dagger + K_1 \psi K_1^\dagger = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \cos 2gt \\ c_0^* c_1 \cos 2gt & |c_1|^2 \end{pmatrix}$$



两个效果算符是  $E_0 = K_0^\dagger K_0$  和  $E_1 = K_1^\dagger K_1$ , 于是得到结果  $\pm 1$  的几率分别是

$$p(+1) = \text{Tr}(E_0 \psi) = \frac{1}{2}[1 + (|c_0|^2 - |c_1|^2) \sin 2gt]$$

$$p(-1) = \text{Tr}(E_1 \psi) = \frac{1}{2}[1 - (|c_0|^2 - |c_1|^2) \sin 2gt]$$

当  $gt$  等于  $\frac{\pi}{4}$  的偶数倍的时候, 两个 Kraus 算子均为单位阵, 系统 Q 的量子态没有变化, 因为系统和仪器处于平庸的直积态.

## 相位阻尼和振幅阻尼

在相位阻尼和振幅阻尼过程中, 看看效果算子是怎样的. 已经知道它们的操作算符分别是

$$K_0^{\text{PD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad K_1^{\text{PD}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{p} \end{pmatrix}$$

$$\hat{K}_0^{\text{AD}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix} \quad \hat{K}_1^{\text{AD}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上标 PD 表示相位阻尼, AD 表示振幅阻尼. 计算相应的效果算符, 发现

$$E_0^{\text{AD}} = (K_0^{\text{AD}})^\dagger K_0^{\text{AD}} = (K_0^{\text{PD}})^\dagger K_0^{\text{PD}} = E_0^{\text{PD}}$$

$$E_1^{\text{AD}} = (K_1^{\text{AD}})^\dagger K_1^{\text{AD}} = (K_1^{\text{PD}})^\dagger K_1^{\text{PD}} = E_1^{\text{PD}}$$

表明这两个不同的演化过程有着相同的效果算符.

## 非正交量子态的区分

作为广义测量的一个应用, 我们来讨论非正交量子态的区分. 这样的制备过程: 以几率  $p_1$  制备一个量子态  $|\psi_1\rangle$ , 以几率  $p_2$  制备量子态  $|\psi_2\rangle$ , 且  $p_1 + p_2 = 1$ . 对于这样的制备结果, 需要用混合系综  $\{p_i, \psi_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) 来描述. 而且, 如果  $|\psi_1\rangle$  和  $|\psi_2\rangle$  不是正交的, 那么即便我们知道  $|\psi_1\rangle$  和  $|\psi_2\rangle$  的具体形式, 也不能严格区分这两个量子态<sup>2</sup>. 换句话说, 我们只能以一定的几率成功地区分它们, 但也有失败的可能.

以自旋 1/2 粒子的量子态为例继续讨论. 不失一般性地, 设

$$|\psi_1\rangle = |z+\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (27)$$

相应的几率依旧记作  $p_1$  和  $p_2$ . 如果  $\theta = \pi$ , 则  $|\psi_2\rangle = |1\rangle$ , 这两个量子态是正交的, 只要让粒子穿过 SG 装置 SG(z), 观察出射粒子的偏转方向即可断定粒子的状态. 而现在  $|\psi_1\rangle$  和  $|\psi_2\rangle$  并不正交, 如果用 SG(z) 装置来检测粒子的状态, 那么观察到向 +z 方向偏转的出射粒子并不表明粒子原先处于  $|\psi_1\rangle$  态, 因为处于  $|\psi_2\rangle$  的粒子会有几率  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  偏向 +z 方向. 同样地, 如果用 SG( $\theta$ ) 装置 (即非均匀磁场的方向在 xz 平面内且与 z 轴的夹角是  $\theta$ , 将该方向记作  $\mathbf{n}$ ) 进行检测, 那么根据“偏向 + $\mathbf{n}$  方向”这一观测结果不能断定入射粒子处于  $|\psi_2\rangle$ . 非正交量子态之间的重叠  $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$  阻碍了我们对它们进行严格区分.

<sup>2</sup>如果能为我们提供无穷多的处于相同状态的量子系统, 那么可以严格确定系统的量子态. 但这是不切实际的, 而且, 量子态是不能克隆的.

虽然如此,仍有一定的几率可以成功地区分它们. 当我们在  $SG(z)$  实验中看到偏向  $-z$  方向的粒子的时候,可以断定入射粒子处于  $|\psi_2\rangle$ . 这是因为,如果入射粒子处于  $|\psi_1\rangle$ ,那么经过  $SG(z)$  之后只能偏向  $+z$  方向而不会看到偏向  $-z$  方向的粒子. 同样地,当我们在  $SG(\theta)$  实验中看到偏向  $-\mathbf{n}$  的粒子,那么将断定入射粒子处于  $|\psi_1\rangle$ . 根据这样的考虑,定义下面三个效果算符

$$E_1 = c |\psi_2^\perp\rangle\langle\psi_2^\perp|, \quad E_2 = c |\psi_1^\perp\rangle\langle\psi_1^\perp|, \quad E_3 = \mathbb{1} - E_1 - E_2 \quad (28)$$

这里  $c > 0$  是一个尚未确定的因子,  $|\psi_1^\perp\rangle$  和  $|\psi_2^\perp\rangle$  分别是与  $|\psi_1\rangle$  和  $|\psi_2\rangle$  正交的量子态.

$$|\psi_1^\perp\rangle = |1\rangle, \quad |\psi_2^\perp\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

引入  $c$  的目的是为了保持效果算符的正定性,虽然  $E_1$  和  $E_2$  是正定的,但是还需要检验  $E_3$  的正定性.  $E_3$  的本征值是  $1 - c \pm c \cos\frac{\theta}{2}$ , 因此考虑到  $E_3$  的正定性,对  $c$  的限制是

$$0 < c < \frac{1}{1 + \cos\frac{\theta}{2}}$$

在这个条件下,三个效果算符都是正定的. 接着考虑对混合系综  $\{p_i, \psi_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) 的广义测量,这个系综的平均量子态是  $\rho = p_1\psi_1 + p_2\psi_2$ . 与效果算符  $E_i$  对应的测量结果记作  $m_i$ , 这些测量结果将体现在测量仪器上. 当得到结果  $m_1$  和  $m_2$  的时候,可以明确地知道粒子的状态分别是  $|\psi_1\rangle$  和  $|\psi_2\rangle$ . 当得到  $m_3$  的时候,我们不能确定粒子的状态,结果  $m_3$  出现的几率就是区分失败的几率,记作  $p^{\text{failure}}$ ,

$$p^{\text{failure}} = \text{Tr}(E_3\rho) = 1 - c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

我们自然希望失败的几率越小越好,而  $c$  的上限是  $\frac{1}{1 + \cos\frac{\theta}{2}}$ , 将这个值代入上式,得到区分失败的最小的几率

$$p_{\min}^{\text{failure}} = \cos\frac{\theta}{2}$$

这个结果正是两个非正交量子态之间的重叠,  $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$ .

## Schmidt 分解

前面曾经说过,可以适当地选择  $\mathcal{H}^A$  和  $\mathcal{H}^B$  的基向量  $\{e_i\}$  和  $\{f_j\}$ , 使得  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$  中的两体纯态  $|\Psi\rangle$  表示为

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{\min\{d_A, d_B\}-1} c_i |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle, \quad c_i > 0$$

该形式对于任意两体量子系统的纯态都是成立的,但是对于三体及三体以上的系统则不适用,对于混合态也不适用. 下面我们给出  $2 \otimes 2$  情形下的证明,证明过程可以推广到高维情形.

任意的  $2 \otimes 2$  的量子纯态可以在自然基向量  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  上展开为

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle, \quad \sum_{i,\mu=0}^1 |c_{i\mu}|^2 = 1.$$

纯态  $|\Psi\rangle$  的密度矩阵记作  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , 粒子 A 的约化密度算符记作  $\rho^A = \text{Tr}_B(\rho)$ . 设  $\rho^A$  的两个正交归一的本征态为  $|e_0\rangle$  和  $|e_1\rangle$ , 相应的本征值为  $p_0$  和  $p_1$ , 且  $p_0, p_1 > 0, p_0 + p_1 = 1$ . 考虑对 A 粒子作酉变换

$$|0\rangle \longrightarrow |e_0\rangle, \quad |1\rangle \longrightarrow |e_1\rangle$$

在基向量  $|e_0\rangle$  和  $|e_1\rangle$  上,  $|\Psi\rangle$  改写为

$$|\Psi\rangle = |e_0\rangle |\tilde{\phi}_0\rangle + |e_1\rangle |\tilde{\phi}_1\rangle \quad (29)$$

其中  $|\tilde{\phi}_0\rangle$  和  $|\tilde{\phi}_1\rangle$  是空间  $\mathcal{H}^B$  中的向量, 但尚未归一. 现在我们希望证明  $|\tilde{\phi}_0\rangle$  和  $|\tilde{\phi}_1\rangle$  是彼此正交的.

以  $|e_0\rangle$  和  $|e_1\rangle$  为  $\mathcal{H}^A$  的基向量, 将  $\rho$  表示为

$$\rho = |e_0\rangle\langle e_0| \otimes |\tilde{\phi}_0\rangle\langle\tilde{\phi}_0| + |e_0\rangle\langle e_1| \otimes |\tilde{\phi}_0\rangle\langle\tilde{\phi}_1| + |e_1\rangle\langle e_0| \otimes |\tilde{\phi}_1\rangle\langle\tilde{\phi}_0| + |e_1\rangle\langle e_1| \otimes |\tilde{\phi}_1\rangle\langle\tilde{\phi}_1| \quad (30)$$

再来计算关于 A 粒子的约化密度矩阵. 注意到

$$\text{Tr} [ |\tilde{\phi}_i\rangle\langle\tilde{\phi}_j| ] = \langle 0|\tilde{\phi}_i\rangle\langle\tilde{\phi}_j|0\rangle + \langle 1|\tilde{\phi}_i\rangle\langle\tilde{\phi}_j|1\rangle = \langle\tilde{\phi}_j|\tilde{\phi}_i\rangle, \quad i, j = 0, 1$$

约化密度矩阵  $\rho^A$  可以表示为

$$\rho^A = |e_0\rangle\langle e_0| \langle\tilde{\phi}_0|\tilde{\phi}_0\rangle + |e_0\rangle\langle e_1| \langle\tilde{\phi}_1|\tilde{\phi}_0\rangle + |e_1\rangle\langle e_0| \langle\tilde{\phi}_0|\tilde{\phi}_1\rangle + |e_1\rangle\langle e_1| \langle\tilde{\phi}_1|\tilde{\phi}_1\rangle$$

另一方面, 我们知道, 在表象  $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle\}$  中  $\rho^A$  是对角的, 即

$$\rho^A = p_0 |e_0\rangle\langle e_0| + p_1 |e_1\rangle\langle e_1|$$

将  $\rho^A$  的上述两种形式对比, 可以得到

$$\langle\tilde{\phi}_i|\tilde{\phi}_j\rangle = \delta_{ij} p_i$$

将  $|\tilde{\phi}_i\rangle$  归一化, 令

$$|f_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} |\tilde{\phi}_i\rangle$$

这相当于将  $\mathcal{H}^B$  的基向量选择为  $\{|f_0\rangle, |f_1\rangle\}$ . 回到 (29), 最终可以将  $|\Psi\rangle$  写为

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p_0} |e_0\rangle |f_0\rangle + \sqrt{p_1} |e_1\rangle |f_1\rangle \quad (31)$$

证明完毕. 另外, 如果两个空间的维数不相同, 设  $\dim(\mathcal{H}^A) < \dim(\mathcal{H}^B)$ , 那么  $\rho^B$  不是满秩的, 有一些  $|f_j\rangle$  不会出现在 Schmidt 分解形式中.

从 Schmidt 分解中, 我们还看到, 两体纯态的两个约化密度矩阵有相同的本征值.

## 混合态的纯化

在前面的讨论中, 我们看到, 如果两体 (以至于多体) 量子系统处于某个纯态  $\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ , 那么某个子系统的局部量子态是用约化密度矩阵描述的, 子系统的量子态是混合态.

现在考虑相反的过程, 设某个量子系统 Q 处于混合态  $\rho^Q$ , 我们可以认为  $\rho$  是处于纯态的两体量子系统的关于某个子系统的约化密度矩阵.

引入一个辅助量子系统 (通常称作 ancilla), 记作 A. 系统 Q 和辅助系统 A 构成两体量子系统. 描述 Q 和 A 的 Hilbert 空间分别是  $\mathcal{H}^Q$  和  $\mathcal{H}^A$ . 描述两体系统的 Hilbert 空间是  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^A$ . 我们需要构造一个纯态  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ , 使得

$$\rho^Q = \text{Tr}_A \Psi, \quad \Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

从  $\mathcal{H}^Q$  上的  $\rho^Q$  到  $\mathcal{H}$  中的  $|\Psi\rangle$  就是混合量子态的纯化 (purification).

标准的纯化形式是这样的. 首先写出  $\rho^Q$  的本征分解形式

$$\rho^Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$$

这里假设  $\mathcal{H}^Q$  的维数是  $n$ , 且  $\rho^Q$  是满秩的.  $\lambda_i$  是  $\rho^Q$  的本征值,  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

将  $\mathcal{H}^A$  的维数选定为  $n$ , 即  $\dim \mathcal{H}^Q = \dim \mathcal{H}^A = n$ . 将  $\mathcal{H}^A$  的基向量选择为  $\{|\varphi_i\rangle\}$ . 构造  $|\Psi\rangle$  如下,

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} |\xi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle \quad (32)$$

容易验证

$$\text{Tr}_A \Psi = \rho^Q$$

考虑一下非标准的纯化. 设想  $\rho^Q$  是系综  $\{p_i, \psi_i\}_{i=1, \dots, m}$  的平均量子态, 这里  $\psi_i$  是纯态  $|\psi_i\rangle$  的密度矩阵, 不同的  $|\psi_i\rangle$  不一定正交, 且  $m$  也未必等于 Hilbert 空间  $\mathcal{H}^Q$  的维数. 系统  $Q$  的密度矩阵是

$$\rho^Q = \sum_{i=1}^m p_i \psi_i, \quad \psi_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

引入辅助系统  $A$ ,  $\dim(\mathcal{H}^A) = m$ ,  $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}^A$ , 且  $\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ , 我们可以把  $\rho^Q$  的纯化形式表示为

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^m \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$$

分析一下  $\mathcal{H}^Q$  和  $\mathcal{H}^A$  维数相同情况下的纯化,  $\dim(\mathcal{H}^Q) = \dim(\mathcal{H}^A) = n$ . 标准的纯化形式由 (32) 给出. 现在考虑在  $\mathcal{H}^A$  的另一组基向量上表示  $|\Psi\rangle$ ,

$$\{|\varphi_i\rangle\} \xrightarrow{V} \{|\eta_i\rangle\}$$

其中  $V$  是酉矩阵, 它的矩阵元是  $v_{ij} = \langle\varphi_i|\eta_j\rangle$ .

在新的表象中,  $|\Psi\rangle$  写为,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_i \sqrt{\lambda_i} |\xi_i\rangle \otimes \sum_j |\eta_j\rangle \langle\eta_j|\varphi_i\rangle \\ &= \sum_j \left( \sum_i \sqrt{\lambda_i} v_{ij}^* |\xi_i\rangle \right) \otimes |\eta_j\rangle \end{aligned}$$

这表明, 当  $\dim(\mathcal{H}^Q) = \dim(\mathcal{H}^A)$  时, 标准纯化形式和非标准纯化形式的差别仅仅是对辅助系统的局部酉变换.

## Zurek 的测量模型

在讨论两体系统的整体酉变换的时候, 我们计算了  $2 \otimes 2$  两体系统的量子态在酉变换  $e^{i\tau(\sigma_z \otimes \sigma_y)}$  的作用下的结果, 大致过程是这样的:

系统和仪器的初态分别是  $|\psi\rangle$  和  $|\varphi\rangle$

两体系统的变换结果是  $|\Psi(\tau)\rangle = e^{i\tau(\sigma_z \otimes \sigma_y)} (|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)$

$$\text{系统的量子态是 } \rho^Q(\tau) = \text{Tr}_M |\Psi(\tau)\rangle\langle\Psi(\tau)| = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0 c_1 \cos 2\tau \\ c_0 c_1 \cos 2\tau & c_1^2 \end{pmatrix}$$

这是一个双值系统 (系统  $Q$ ) 与另一个双值系统 (被视作仪器) 相互作用后系统的状态. 我们还说过, 系统的状态从  $|\psi\rangle$  到  $\rho^Q(\tau)$  的演化过程属于开放量子系统的演化. 开放量子系统的演化关注的是系统与环境相互作用后系统的状态. 如果用一个简单的双值系统来模拟环境, 那么这只是一个过于粗糙的模型. 下面考虑稍微复杂, 但还是可以计算的情况.

设想环境是由  $N$  个两能级系统构成的.

$N$  个两能级系统  $\sim$  环境

设第  $k$  个两能级系统的 Hilbert 空间的基向量是  $\{|0_k\rangle, |1_k\rangle\}$ , 而且,  $N$  个两能级系统之间没有相互作用.

假设系统  $Q$  和第  $k$  个两能级系统之间的相互作用是

$$H^{QE_k} = -g_k \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_k} \quad (33)$$

系统  $Q$  和环境  $E$  的整体的 Hamilton 量是

$$H^{QE} = \sum_{k=1}^N H^{QE_k}. \quad (34)$$

它的具体形式是

$$\begin{aligned} H^{QE} &= -g_1 \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_1} \otimes \mathbb{1}^{E_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \\ &\quad - g_2 \sigma_z^Q \otimes \mathbb{1}^{E_1} \otimes \sigma_z^{E_2} \otimes \mathbb{1}^{E_3} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \\ &\quad - g_3 \sigma_z^Q \otimes \mathbb{1}^{E_1} \otimes \mathbb{1}^{E_2} \otimes \sigma_z^{E_3} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

注意到上式右端中的各项都是彼此对易的.

系统和环境随时间的演化是 (以下令  $\hbar = 1$ )

$$U^{QE}(t) = \exp \{ -iH^{QE}t \}$$

为了得到  $U^{QE}(t)$  的具体形式, 可以对 (35) 式的右端逐项计算. 例如, 第一项给出如下酉变换,

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \exp \{ i g_1 t (\sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_1}) \} \otimes \mathbb{1}^{E_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \\ &= \mathbb{1}^Q \otimes \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{1}^{E_k} \cos g_1 t + i \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_1} \otimes \mathbb{1}^{E_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \sin g_1 t \end{aligned}$$

第二项给出的酉变换是

$$U_2(t) = \mathbb{1}^Q \otimes \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{1}^{E_k} \cos g_2 t + i \sigma_z^Q \otimes \mathbb{1}^{E_1} \otimes \sigma_z^{E_2} \otimes \mathbb{1}^{E_3} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \sin g_2 t$$

其它各项给出类似的形式,  $U_k(t)$ . 它们都是控制酉变换: 当系统的量子态是  $|0\rangle$  时, 对  $E_k$  进行酉变换  $\begin{pmatrix} e^{i g_k t} & 0 \\ 0 & e^{-i g_k t} \end{pmatrix}$ ; 当系统的量子态是  $|1\rangle$  时, 对  $E_k$  进行酉变换  $\begin{pmatrix} e^{-i g_k t} & 0 \\ 0 & e^{i g_k t} \end{pmatrix}$ . 根据这个规则, 容易计算系统和环境作为一个整体的演化结果.

系统和环境的整体初态是

$$|\Psi^{QE}(0)\rangle = |\psi^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}(0)\rangle$$

其中  $|\psi^Q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ ,  $|\mathcal{E}(0)\rangle$  是环境的初态, 设为

$$|\mathcal{E}(0)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k |0_k\rangle + \beta_k |1_k\rangle) \quad (36)$$

这是一个“大”的纯的直积态.

计算  $Q$  与  $E_k$  的相互作用以及酉变换对初态的影响, 这相当于考虑两体系统的演化.

$$\begin{aligned} & U_k(t) \left[ (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (\alpha_k |0_k\rangle + \beta_k |1_k\rangle) \right] \\ &= \exp \{ i g_k t \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_k} \} \left[ a \alpha_k |0\rangle \otimes |00_k\rangle + a \beta_k |0\rangle \otimes |01_k\rangle \right. \\ & \quad \left. + b \alpha_k |1\rangle \otimes |10_k\rangle + b \beta_k |1\rangle \otimes |11_k\rangle \right] \\ &= a |0\rangle \otimes \left[ \alpha_k e^{i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{-i g_k t} |1_k\rangle \right] \\ & \quad + b |1\rangle \otimes \left[ \alpha_k e^{-i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{i g_k t} |1_k\rangle \right] \end{aligned}$$

考虑了  $Q$  与所有的  $E_k$  之间的相互作用和时间演化之后, 系统和环境的整体量子态是

$$\begin{aligned} & |\Psi^{QE}(t)\rangle \\ &= a |0\rangle \otimes \bigotimes_{k=1}^N \left[ \alpha_k e^{i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{-i g_k t} |1_k\rangle \right] \\ & \quad + b |1\rangle \otimes \bigotimes_{k=1}^N \left[ \alpha_k e^{-i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{i g_k t} |1_k\rangle \right] \end{aligned}$$

定义

$$|\mathcal{E}_0(t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left[ \alpha_k e^{i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{-i g_k t} |1_k\rangle \right], \quad (37)$$

$$|\mathcal{E}_1(t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left[ \alpha_k e^{-i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{i g_k t} |1_k\rangle \right]. \quad (38)$$

将  $|\Psi^{QE}(t)\rangle$  重新改写为

$$|\Psi^{QE}(t)\rangle = a |0^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + b |1^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle. \quad (39)$$

现在, 通过求迹把环境  $E$  去除, 得到  $Q$  的状态. 先定义一个函数  $z(t)$ ,

$$z(t) = \prod_{k=1}^N \left[ \cos 2g_k t + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin 2g_k t \right]$$

它实际上就是  $|\mathcal{E}_0(t)\rangle$  和  $|\mathcal{E}_1(t)\rangle$  之间的内积,

$$\langle \mathcal{E}_1(t) | \mathcal{E}_0(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k=1}^N \left[ |\alpha_k|^2 e^{i2g_k t} + |\beta_k|^2 e^{-i2g_k t} \right] \\
&= \prod_{k=1}^N \left[ \cos 2g_k t + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin 2g_k t \right] \\
&= z(t).
\end{aligned}$$

系统和环境相互作用后系统的量子态记作  $\rho^Q$ , 具体形式是

$$\rho^Q(t) = \text{Tr}_E |\Psi^{QE}(t)\rangle \langle \Psi^{QE}(t)| \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
&= |a|^2 |0\rangle \langle 0| + z(t) ab^* |0\rangle \langle 1| + z^*(t) a^* b |1\rangle \langle 0| + |b|^2 |1\rangle \langle 1| \\
&= \begin{pmatrix} |a|^2 & z(t) ab^* \\ z^*(t) a^* b & |b|^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (41)$$

非对角项随时间变化. 分析  $z(t)$  的性质.

- 初始时刻  $t = 0, z(0) = 1$ .
- $|z(t)|^2 = \prod_{k=1}^N \left[ \cos^2 2g_k t + (|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2)^2 \sin^2 2g_k t \right] \leq 1$ .

容易看到, 随着  $N$  的增大,  $|z(t)|$  更快地衰减到 0. 虽然  $|z(t)|$  在本质上是一个周期函数, 但是, 如果  $g_k$  的取值是随机的, 那么  $|z(t)|$  的周期将会很长, 重新回到初值 1 是一件遥遥无期的事. 见图 3.

在 (41) 式所示的  $\rho^Q$  中, 非对角项的模在短时间内衰减到零.

$$\rho^Q \longrightarrow |a|^2 |0\rangle \langle 0| + |b|^2 |1\rangle \langle 1|.$$

这时, 系统的状态变成了对角形式的混合态. 这是环境对系统的量子态的影响所产生的结果. Zurek 曾用这个模型讨论了环境导致的超选择规则<sup>3</sup>.

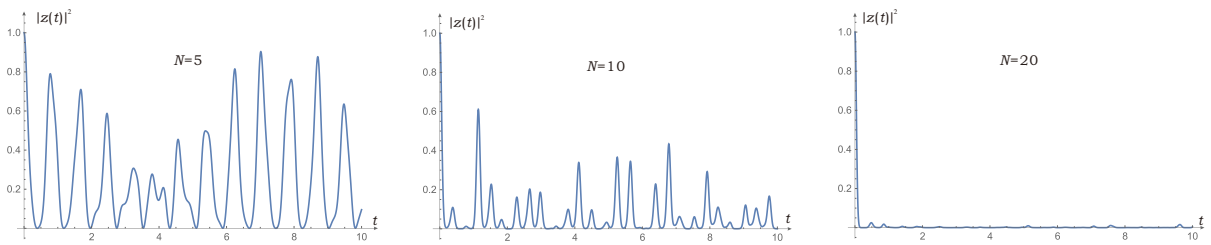


图 3

现在, 我们用上面讨论的模型解释以前的一个问题. 我们以前讨论过最简单的测量模型 —— 被测系统  $Q$  是一个双值系统, 并且用一个双值系统扮演测量仪器  $M$ . 假设系统和仪器达到如下形式的 pre-measurement state,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \otimes |z+\rangle + |z-\rangle \otimes |z-\rangle) \quad (42)$$

<sup>3</sup> 参看 W. H. Zurek, Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? Physical Review D **24**, 1516-1525 (1981); Environment-induced superselection rules. Physical Review D **26**, 1862-1880 (1982). 以及综述 W. H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. Reviews of Modern Physics **75**, 715 (2003).

其中直积的次序是 系统  $\otimes$  仪器. 而上述形式可以等价地表示为

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle \otimes |x+\rangle + |x-\rangle \otimes |x-\rangle) \quad (43)$$

然后我们说, 如果观测仪器的力学量  $\sigma_z^M$ , 那么应该利用 (42) 式. 当看到  $\sigma_z^M$  的观测结果为 +1 或 -1 的时候, 就可以推知系统的观测量  $\sigma_z^Q$  的值分别为 +1 或 -1, 相应的几率都是  $\frac{1}{2}$ .

另一方面, 如果我们观测仪器的力学量  $\sigma_x^M$ , 那么就on应该利用 (43) 式, 获得系统的观测量  $\sigma_x^Q$  的取值以及几率.

这样一来,

$$\text{我们似乎可以随意地选择仪器的观测量, 以实现对系统的不同的观测量的测量.} \quad (44)$$

这个“似乎”的说法会带来很大麻烦. 我们知道, 对系统的某个观测量作测量的时候, 需要特定的实验过程, 也就是说, 需要在特定的表象中进行, 不能在相同的实验过程中测量不对易的观测量. 可是现在, 当系统和仪器达到 (42) 或 (43) 的形式之后——这是由某个特定的实验过程决定的, 我们竟然可以对仪器的不同的观测量作测量, 进而实现对系统的不同的 (甚至是不对易的) 的观测量的测量, 这岂不是对量子力学基本原理的颠覆?

要反驳这个观点其实并不困难, 注意到, 只是对于形如 (42) 或 (43) 的测量前 (pre-measurement) 的量子态, 我们才可能 (仅仅是可能) 提出这样一个会带来麻烦的问题 (44), 而对于更为一般的测量前的量子态, 则不可能做到对两个不对易的观测量进行严格测量. 例如, 设测量前的量子态为

$$\alpha |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta |1\rangle \otimes |1\rangle$$

其中  $|\alpha|$  和  $|\beta|$  都不等于  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . 这个形式可以成功地实现对  $\sigma_z^Q$  的测量, 但是, 如果企图通过测量  $\sigma_x^M$  实现对系统的  $\sigma_x^Q$  测量, 那么

$$\begin{aligned} & \alpha |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta |1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |x+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) \otimes |x-\rangle \end{aligned}$$

测量  $\sigma_x^M$  的结果只是平庸的等几率分布. 量子测量是要面对未知量子态的, 不可能在系统量子态未知的情况下, 经由系统和仪器的相互作用和演化总是得到形如 (42) 或 (43) 的测量前的量子态. 因此, 从测量的角度说, 观点 (44) 是不成立的.

但是, 事情并没有结束. 以上分析和讨论只是在 Hilbert 空间中转悠, 在态矢量的不同表示形式上兜圈子, 而量子测量的结果终究要表现在经典层面上. 也就是说, 仪器必须与环境接触, 受环境的影响, 最终体现出明确的现象. 在下面的讨论中, 我们将看到, 环境的存在和对仪器的影响决定了仪器的哪一个观测量是有用的, 对它的观测是切实可行的. 也就是说, 在有环境影响的情况下, 不是仪器的任意某个观测量都是有用的.

设想系统和仪器达到了如 (42) 所示的量子态, 然后, 仪器  $M$  和环境  $E$  之间有相互作用, 但是系统  $Q$  没有受到环境  $E$  的影响. 仪器和环境之间的相互作用的形式与 (34) 类似, 不过是把上标  $QE$  改为  $ME$ .

$$H^{ME} = \sum_{k=1}^N H^{ME_k} \quad (45)$$

实际上, 这里考虑的是由  $Q$ ,  $M$  和  $E$  组成三体量子系统. 环境的初态是  $|\mathcal{E}(0)\rangle$ , 由 (36) 式给出, 随时间的演化过程是

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle + |1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle) \otimes |\mathcal{E}(0)\rangle$$



$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle \quad (46)$$

其中  $|\mathcal{E}_0(t)\rangle$  和  $|\mathcal{E}_1(t)\rangle$  分别由 (37) 和 (38) 给出.

接着考虑对  $M$  的  $\sigma_z^M$  作测量,

测量 $\sigma_z^M$ 的结果	相应的系统和环境的状态
+1	$ 0^Q\rangle \otimes  \mathcal{E}_0(t)\rangle$
-1	$ 1^Q\rangle \otimes  \mathcal{E}_1(t)\rangle$

不论测量  $\sigma_z^M$  得到什么结果, 系统和环境都是处于毫无关联的直积态, 就是说, 在测量  $\sigma_z^M$  的时候, 环境虽在, 却不会与被测系统  $Q$  产生任何关联, 在这种情况下, 环境就像不存在一样.

再考虑另外一种情况, 测量  $\sigma_x^M$ . 为此, 将 (46) 改写为

$$\frac{1}{2} [ |0^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + |1^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle ] \otimes |x+\rangle + \frac{1}{2} [ |1^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle - |0^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle ] \otimes |x-\rangle$$

这里, 为了看得更清楚, 在上式中调整了直积的次序, 将仪器放在了最后. 看看测量  $\sigma_x^M$  的结果以及相应的系统和环境的状态.

测量 $\sigma_x^M$ 的结果	相应的系统和环境的状态
+1	$\frac{1}{\sqrt{2}} [  0^Q\rangle \otimes  \mathcal{E}_0(t)\rangle +  1^Q\rangle \otimes  \mathcal{E}_1(t)\rangle ]$
-1	$\frac{1}{\sqrt{2}} [  1^Q\rangle \otimes  \mathcal{E}_0(t)\rangle -  0^Q\rangle \otimes  \mathcal{E}_1(t)\rangle ]$

这下麻烦了. 在测量  $\sigma_x^M$  得到  $\pm 1$  的时候, 系统和环境都处于纠缠态. 我们不可能把这两个纠缠态表示为  $|x\pm\rangle \otimes |\text{环境的某个状态}\rangle$  这样的直积形式. 因此, 当仪器和环境有 (45) 所示的相互作用时, 只要仪器的观测量不是  $\sigma_z^M$ , 都会导致系统和环境处于纠缠态. 这是一个很微妙的现象, 虽然在我们的事先给出的设定中, 系统和环境之间没有发生相互作用, 但是, 借助对仪器的不同的观测方式, 却是可以建立系统和环境之间的量子关联, 即系统和环境处于纠缠态. 而且, 对仪器的不同的观测方式会带来系统和环境之间不同程度的纠缠. 例如, 测量  $\sigma_z^M$ , 系统和环境之间没有纠缠; 测量  $\sigma_x^M$ , 系统和环境之间的纠缠达到最大 (不一定是最大纠缠态).

现在可以看到, 在相互作用 (45) 的影响下, 仪器的观测量  $\sigma_x^M$  不是一个“好”的观测量, 它无法逃脱环境的影响. 如果对这个“不好”的观测量进行测量, 那么将间接地导致系统和环境的关联, 也就不能实现对系统的任何观测量的严格测量.

还可以换一个视角看待上述结论. 在三体量子态 (46) 中, 对环境求迹. 注意到环境的量子态  $|\mathcal{E}_0(t)\rangle$  和  $|\mathcal{E}_1(t)\rangle$  是基本上正交的. 得到系统和仪器的量子态  $\rho^{QM}$ ,

$$\rho^{QM} = \frac{1}{2} ( |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| )$$

这是一个两体混合态. 在量子测量的意义上, 它不像是以纯态  $c_0 |0\rangle |\varphi_0\rangle + c_1 |1\rangle |\varphi_1\rangle$  的形式体现仪器的状态与系统的状态之间的一一对应. 但是也可以通过对仪器的  $\sigma_z^M$  的观测实现对系统的  $\sigma_z^Q$  的测量. 第一项  $|00\rangle\langle 00| = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ , 它告诉我们, 当仪器的  $\sigma_z^M$  表现出结果 +1 的时候, 系统的  $\sigma_z^Q$  取值 +1. 对于第二项  $|00\rangle\langle 00| = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$  也有类似的说法.

接下去应该看看对  $\sigma_x^M$  的测量, 不过, 为了使讨论的问题稍微具有一些一般性, 我们从头说起. 假设系统的初态是  $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ , 与仪器建立的适当的相互作用之后, 二者演化为测量前的两体量子态

$$\alpha |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta |1\rangle \otimes |1\rangle$$

这里假定  $\alpha$  和  $\beta$  都是实数. 环境和仪器的相互作用导致了下面的三体纯态,

$$\begin{aligned} & (\alpha |0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle + \beta |1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle) \otimes |\mathcal{E}(0)\rangle \\ \longrightarrow & \alpha |0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + \beta |1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle \end{aligned} \quad (47)$$

对环境求迹之后, 得到系统和仪器的两体混合态,

$$\text{Eq. (47)} \xrightarrow{\text{Tr}_E} \alpha^2 |00\rangle\langle 00| + \beta^2 |11\rangle\langle 11|$$

这个形式当然可以帮助我们借助观测  $\sigma_z^M$  以实现系统的  $\sigma_z^Q$  的测量. 但是, 如果观测  $\sigma_x^M$  呢?

大家应该验证下表中的结果.

在  $\alpha^2 |00\rangle\langle 00| + \beta^2 |11\rangle\langle 11|$  中测量  $\sigma_x^M$

测量 $\sigma_x^M$ 的结果及其几率	相应的系统的状态
+1, $\frac{1}{2}$	$\alpha^2  0\rangle\langle 0  + \beta^2  1\rangle\langle 1 $
-1, $\frac{1}{2}$	$\alpha^2  0\rangle\langle 0  + \beta^2  1\rangle\langle 1 $

对以上结果, 可以说:

- 系统与仪器相互作用之后, 以及仪器和环境相互作用之后, 系统的局部量子态没有改变, 都是  $\alpha^2 |0\rangle\langle 0| + \beta^2 |1\rangle\langle 1|$ . 这是应该的, 因为, 当系统和仪器有了相互作用之后, 随便怎么折腾仪器 —— 只要没有发生选择测量之类的事, 都不会改变系统的局部量子态.
- 对  $\sigma_x^M$  的观测不能实现对系统的某个观测量的测量. 不论测量  $\sigma_x^M$  的结果是 +1 还是 -1, 相应的系统的状态都是相同的混合态.