作业五

2019/12/29

问题 1 氢原子径向波函数方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}R-\frac{e^2}{r}R=ER.$$

换一种无量纲化的形式, 令

$$\rho=\frac{r}{a_0},\quad \epsilon=-\frac{E}{E_I},$$

其中 a_0 是 Bohr 半径, E_I 是氢原子的离解能,

$$a_0=\frac{\hbar^2}{\mu e^2},\quad E_I=\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}\sim 13.6\mathrm{eV}$$

径向方程改写为

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}\rho-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}-\epsilon\right)R=0$$

再令 $R(\rho)=\frac{u(\rho)}{\rho}$, 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}\right)u(\rho)=\epsilon u(\rho) \tag{1}$$

定义如下两个算子,

$$A_\ell^-=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\frac{\ell+1}{\rho}-\frac{1}{\ell+1},\quad A_\ell^+=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{\ell+1}{\rho}+\frac{1}{\ell+1}$$

- 计算 $A_\ell^-A_\ell^+$, 证明, 关于 $u(r)$ 的方程 (1) 可以改写为

$$(A_\ell^-A_\ell^+)u=\left(\epsilon-\frac{1}{(\ell+1)^2}\right)u \tag{2}$$

- 证明

$$A_\ell^+A_\ell^-=A_{\ell+1}^-A_{\ell+1}^++\frac{1}{(\ell+2)^2}-\frac{1}{(\ell+1)^2}$$

  用 A_ℓ^+ 左乘 (2) 两端, 证明 $A_\ell^+u(\rho)$ 满足径向方程, 对应的本征值仍然是 ϵ, 但是角动量量子数变为 $\ell'=\ell+1$.

- 类似地, 证明 $A_\ell^-u(\rho)$ 也满足径向方程, 对应的本征值为 ϵ, 角动量量子数变为 $\ell'=\ell-1$.
- 计算 $A_\ell^-A_\ell^+$ 在径向函数 $u(\rho)$ 中的期望值, 证明 $\epsilon\leqslant\frac{1}{(\ell+1)^2}$.

- 可以看到, 如果 $u_\ell(\rho)$ 是径向波函数的本征方程 (1) 的解, 那么 $A_\ell^\pm u_\ell(\rho)$ 也是径向方程的解, 只不过需要将方程中的角动量量子数改为 $\ell \pm 1$, 所以说 $A_\ell^\pm u_\ell(\rho) \propto u_{\ell\pm1}(\rho)$. 这同时表明本征值 ϵ 存在简并. 又因为 $\epsilon \leqslant \frac{1}{(\ell+1)^2}$, 所以升算子 A_ℓ^+ 不能一直作用下去. 基于这样的考虑, 将最大的 ℓ 记作 $\ell_{\max}$, 应该有

$$\epsilon = \frac{1}{(\ell_{\max}+1)^2} := \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

与 $\ell_{\max}$ 对应的进行波函数记作 $u_{\ell_{\max}}(\rho)$, 写出 $u_{\ell_{\max}}(\rho)$ 满足的方程并求解 ($u_{\ell_{\max}}(\rho)$ 当然满足方程 (1), 但这个方程不容易求解). ■

问题 2 处于中心对称势场中的粒子的哈密顿量具有空间旋转不变性, 哈密顿量的本征函数可以表示为 $R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$, 相应的能量本征值 $E_{n,l}$ 与 L_z 的量子数 m 无关, 具有 $2l+1$ 重简并. 而一些特殊的动力学系统具有更高的简并度, 例如三维各向同性谐振子和氢原子.

考虑三维各向同性谐振子, 在直角坐标系中, 位置算子和动量算子分别表示为 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ 和 $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$, 哈密顿量是

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} + \frac{P_3^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$$

这相当于三个一维谐振子的组合,

$$H = H_1 + H_2 + H_3$$

对每一个一维谐振子, 定义降算子 a_k 和升算子 $a_k^\dagger$, $k = 1, 2, 3$. 哈密顿量又可以写为

$$H = \hbar\omega \sum_{k=1}^{3} \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right)$$

证明, 形如 $a_j^\dagger a_k$ 的算子是守恒量, 即

$$[a_j^\dagger a_k, H] = 0$$

由 8 个 $a_j^\dagger a_k$ 构造如下厄密算子,

$$A_1 = a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1, \quad A_2 = -i(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1)$$

$$A_3 = a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2, \quad A_4 = a_1^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_1$$

$$A_5 = -i(a_1^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_1), \quad A_6 = a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2$$

$$A_7 = -i(a_2^\dagger a_3 - a_3^\dagger a_2), \quad A_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - 2a_3^\dagger a_3)$$

这 8 个算子也都是守恒量. 可以验证, 它们满足如下对易关系,

$$[A_j, A_k] = 2i f_{jkl} A_l$$

其中 f_{jkl} 关于下标 j, k 和 l 是完全反对称的, 并且非零项是

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\{A_k\}_{k=1,\cdots,8}$ 构成 su(3) 代数, 三维各向同性谐振子具有 SU(3) 对称性.

在 $\{A_k\}$ 中找到轨道角动量的三个分量. ■

问题 3 考虑氢原子的动力学对称性. 非相对论情形下, 氢原子的能级 E_n 的简并度是 n^2, 大于旋转对称性所能提供的 $2l+1$ 重简并度. 实际上, 除了轨道角动量之外, 还有别的守恒量. 令

$$\mathbf{M} = \frac{1}{m}(\mathbf{P}\times\mathbf{L} - \mathbf{L}\times\mathbf{P}) - \frac{e^2}{r}\mathbf{R}$$

$\mathbf{M}$ 称为 Laplace-Runge-Lenz 矢量.

证明 $\mathbf{M}$ 是守恒量, 即 $[\mathbf{M}, H] = 0$.

6 个力学量, M_j 和 L_k 有如下对易关系,

$$[L_j, L_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}L_l$$

$$[L_j, M_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}M_l$$

$$[M_j, M_k] = -i\hbar\epsilon_{jkl}\frac{2H}{m}L_l$$

对于氢原子的束缚态 ($E<0$), 上述守恒量构成 SO(4) 群的 Lie 代数. 氢原子具有 SO(4) 对称性. ■

轨道角动量的相干态

在讨论谐振子的时候, 有相干态 $|\alpha\rangle$, 它的特点是: ① 位置和动量在相干态中的期望值随时间的演化如同经典谐振子; ② 开始的时候处于相干态的谐振子在时间演化的过程中始终处于相干态; ③ 在相干态中位置和动量满足最小不确定关系.

现在讨论角动量中的相干态, 出发点是不确定关系. 角动量的三个分量不是彼此对易的, 当然具有形如 $\Delta L_x\Delta L_y \geqslant \frac{1}{2}\left|\langle[L_x, L_y]\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\langle L_z\rangle$ 的不确定关系. 但是这个形式的不确定关系不是太好, 如果在 $|l,0\rangle$ 中计算不等式两端的值, 那么右端为零.

转而考虑 $(\Delta L_x)^2 + (\Delta L_y)^2 + (\Delta L_z)^2$ 的最小值是多少, 这里, 对于观测量 A, 定义 $(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$.

问题 4 设想某个物理系统具有固定的轨道角动量, 就是说, 该系统的量子态 $|\psi\rangle$ 是 L^2 的本征态,

$$L^2|\psi\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|\psi\rangle$$

在位置表象中, $|\psi\rangle$ 的波函数 $\psi(\mathbf{r})$ 可以表示

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_k\sum_{m=-\ell}^{\ell} R_{k,\ell}(r)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$$

其中 k 是与角动量无关的量子数 (比如系统的能级), $R_{k,\ell}(r)$ 可以视作系统的径向波函数. 不过, 在下面的讨论中, 并不需要用到波函数的具体形式.

在量子态 $|\psi\rangle$ 中, 轨道角动量 $\mathbf{L}$ 的期望值记作

$$\langle\mathbf{L}\rangle = \langle\psi|\mathbf{L}|\psi\rangle$$

这是一个 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 三个分量是 $\langle\psi|L_k|\psi\rangle$, $k = x, y, z$.

我们暂且假设量子态 $|\psi\rangle$ 能够使得 $\langle\psi|L_x|\psi\rangle = \langle\psi|L_y|\psi\rangle = 0$.

- 对于所有这样的量子态, $(\Delta L_x)^2 + (\Delta L_y)^2 + (\Delta L_z)^2$ 的最小值是多少?

- 能够达到这个最小值的量子态是什么样的？将这样的量子态记作 $|\zeta\rangle$.
- 考虑与 z 夹角为 θ 的某个方向，在该方向上的角动量记作 L_θ，在上述 $|\zeta\rangle$ 中计算 L_θ 的标准方差 $(\Delta L_\theta)_\zeta$，证明

$$(\Delta L_\theta)_\zeta = \hbar\sqrt{\frac{\ell}{2}}\sin\theta$$ ■

考虑一般意义上的角动量 $\mathbf{J}$，设量子态 $|\psi\rangle$ 是 $\{J^2, J_z\}$ 的共同本征态，我们需要考虑的是，怎样形式的 $|\psi\rangle$ 能够使得 $(\Delta J_x)^2+(\Delta J_y)^2+(\Delta J_z)^2$ 取最小值，最小值又是什么.

$$\begin{aligned}
&(\Delta J_x)^2+(\Delta J_y)^2+(\Delta J_z)^2\\
=&\langle J_x^2\rangle+\langle J_y^2\rangle+\langle J_z^2\rangle-\langle J_x\rangle^2-\langle J_y\rangle^2-\langle J_z\rangle^2\\
=&\langle J^2\rangle-\langle J_x\rangle^2-\langle J_y\rangle^2-\langle J_z\rangle^2\\
=&j(j+1)\hbar^2-\langle J_x\rangle^2-\langle J_y\rangle^2-\langle J_z\rangle^2
\end{aligned}$$

于是问题转化为，什么样的 $|\psi\rangle$ 使 $\langle J_x\rangle^2+\langle J_y\rangle^2+\langle J_z\rangle^2$ 取最大值，最大值是多少？

角动量 $\mathbf{J}$ 在态 $|\psi\rangle$ 中的期望值是 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi$，用列向量表示

$$\langle\mathbf{J}\rangle_\psi=\Big(\langle\psi|J_x|\psi\rangle\quad\langle\psi|J_y|\psi\rangle\quad\langle\psi|J_z|\psi\rangle\Big)^T$$

其中的上标 T 表示转置.

对 $|\psi\rangle$ 作旋转变换，相应的酉算子是

$$U(\mathbf{n},\vartheta)=\exp\left\{-\frac{i\vartheta}{\hbar}J_n\right\},\quad J_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}$$

旋转变换使得 $|\psi\rangle\longrightarrow|\psi'\rangle=U(\mathbf{n},\vartheta)\,|\psi\rangle$. 在 $|\psi'\rangle$ 中，角动量 $\mathbf{J}$ 的期望值是

$$\langle\mathbf{J}\rangle_{\psi'}=\Big(\langle\psi'|J_x|\psi'\rangle\quad\langle\psi'|J_y|\psi'\rangle\quad\langle\psi'|J_z|\psi'\rangle\Big)^T$$

分析两个向量 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi$ 和 $\langle\mathbf{J}\rangle_{\psi'}$ 之间的联系.

问题 5 简单地，设 $j=1$，上述旋转变换是绕 z 轴的旋转，即

$$U(z,\phi)=\exp\left\{-\frac{i\phi}{\hbar}J_z\right\}$$ ■

在此情况下，给出 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi$ 和 $\langle\mathbf{J}\rangle_{\psi'}$ 之间的联系.

在对 $|\psi\rangle$ 进行旋转变换的过程中，期望值向量 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi$ 表现得如同 $\mathbb{R}^3$ 中的向量. 我们来考虑向量 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi$ 的 “长度” 的平方，即

$$\langle\mathbf{J}\rangle_\psi^2=\langle J_x\rangle_\psi^2+\langle J_y\rangle_\psi^2+\langle J_z\rangle_\psi^2$$

如果对 $|\psi\rangle$ 进行旋转变换，那么 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi^2$ 是不变的. 更进一步地，还可以找到这样一个旋转变换 U，$|\psi'\rangle=U\,|\psi\rangle$，不但有 $\langle\mathbf{J}\rangle_\psi^2=\langle\mathbf{J}\rangle_{\psi'}^2$，而且还有

$$\langle\mathbf{J}\rangle_{\psi'}=\Big(0\quad 0\quad\langle\psi'|J_z|\psi'\rangle\Big)^T \tag{3}$$

问题 6 考虑自旋为 1 的粒子, $s = 1$. 设粒子的状态是

$$|\psi\rangle = a\,|+1\rangle + b\,|0\rangle + c\,|-1\rangle$$

其中 a, b 和 c 设为实数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. 基向量 $|k\rangle, k = +1, 0, -1$, 是 S_z 的本征向量, 对应的本征值分别为 $+\hbar$, 0 和 $-\hbar$. 基向量 $|k\rangle$ 具有自然基向量的形式.

找一个旋转变换 U, 将 $|\psi\rangle$ 变为 $|\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle$, 使得期望值向量 $\langle \mathbf{J} \rangle_{\psi'}$ 有 (3) 式的形式.

如果把这个问题放在自旋为 1/2 粒子的情形中讨论, 那么计算过程将非常直观, 不妨试试看. ■

当 $j = \frac{1}{2}$ 时, 对于任意的 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ (实际上 $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathbb{C}^2$), 总是有 $\langle \mathbf{J} \rangle_\psi^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$. 它正好等于 $\langle J^2 \rangle_\psi$, 这只是一个巧合, 或者说是 $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ 空间的特殊性造成的. 当 $j = 1$ 时, 就没有这样的结论了.

一个自然的问题是: 对于一般的 j, 什么的量子态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_j$ 可以使得向量 $\langle \mathbf{J} \rangle_\psi$ 最长? 也就是说,

$$\max_{\text{All } |\psi\rangle \in \mathcal{H}_j} \langle \mathbf{J} \rangle_\psi^2 = ? \tag{4}$$

空间 $\mathcal{H}_j$ 的基向量是 $|j, m\rangle, m = -j, \cdots, j$, 或者简单地记作 $|m\rangle$. 这些基向量在形式上等同于自然基向量. 任意的 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_j$ 可以表示为

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} c_m\,|m\rangle$$

需要注意的是, 当 $j = \frac{1}{2}$ 时, 任意的 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$ 都是某个 $J_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$ 的本征向量. 但是一般情况下并不如此. 例如, 考虑自旋为 1 的粒子, 可以计算 S_n 的本征态, 其中只用到了两个参数, θ 和 ϕ. 但是 $\mathcal{H}_1$ 空间中的任意量子态应该表示为

$$c_+\,|1, +1\rangle + c_0\,|1, 0\rangle + c_-\,|1, -1\rangle$$

考虑归一化条件之后, 有五个实参数, 即便不管整体相因子, 也有四个实参数, 显然不能总是某个 S_n 的本征态. 实际上, $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathbb{C}^3$ 都是三维复空间, 它们的数学结构是一样的, 我们说不能把 $\mathcal{H}_1$ 等同于 $\mathbb{C}^3$, 指的是, 在 $\mathcal{H}_1$ 中考虑的酉变换只能是旋转变换, 而 $\mathbb{C}^3$ 中的酉变换则是一般的 SU(3) 变换.

回到 (4) 式中的问题, 以 $j = 1$ 为例. 需要在所有可能的 $|\psi\rangle$ 中找寻 $\langle \mathbf{J} \rangle_\psi^2$ 的最大值, 所以 (4) 式应该写为

$$\max_{\text{All } U \in \mathrm{SU}(3)} \langle \psi | U^\dagger \mathbf{J} U | \psi \rangle^2 = ? \tag{5}$$

这里 $|\psi\rangle$ 可以是任意某个固定的量子态. 在所有可能的量子态中找寻 $\langle \mathbf{J} \rangle_\psi^2$ 的最大值, 这相当于对某个固定的 $|\psi\rangle$ 进行 SU(3) 变换, 在变换得到的所有结果中找寻 $\langle \mathbf{J} \rangle_\psi^2$ 的最大值. 但是, 仅仅通过旋转变换是不能穷尽 $\mathbb{C}^3$ 中所有的量子态的.

注意到 (5) 式不好处理, 因为我们对 SU(3) 不熟悉. 但是, 可以通过旋转变换将期望值向量 $\langle \mathbf{J} \rangle_\psi$ 变换为 (3) 式, 即

$$\langle \mathbf{J} \rangle_{\psi'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle \psi' | J_z | \psi' \rangle \end{pmatrix}^T \tag{6}$$

而旋转变换是不改变期望值向量的 “长度” 的, 所以只需要考虑 J_z 在所有的 $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^3$ 中的期望值就可以了. 我们又知道, 厄密算子 A 在某个量子态 ρ 中的期望值介于 A 的最小本征值和最大本征值之间.

$$a_{\min} \leqslant \mathrm{Tr}(A\rho) \leqslant a_{\max}, \quad \text{for } \forall\ \rho$$

这里 $a_{\min}$ 和 $a_{\max}$ 分别是 A 的最小本征值和最大本征值. 而 J_z 在最大本征值是 $j\hbar$, 相应的本征态是 $|j, j\rangle$.

问题 7 根据上面的分析，考虑自旋为 1 的粒子的角动量 $\mathbf{S}$. 定义

$$(\Delta S)^2 = \langle S^2 \rangle - \langle \mathbf{S} \rangle^2$$

求出 $(\Delta S)^2$ 的最小值. ■

现在可以看到, 在 $\mathcal{H}_j$ 空间中, 使得 $(\Delta J_x)^2 + (\Delta J_y)^2 + (\Delta J_z)^2$ 取最小值的量子态有无穷多个, 它们的特点是: 经过适当的旋转变换后, 可以变为 J_z 的对应于本征值为 $j\hbar$ 的本征态, 或者反过来说, 这些量子态是对 $|j, j\rangle$ 进行旋转变换后的结果, 即

$$|\psi\rangle = U(\mathcal{R})\,|j, j\rangle \tag{7}$$

其中 $\mathcal{R}$ 表示旋转变换, $U(\mathcal{R})$ 是相应的酉算子.

旋转变换 $\mathcal{R}$ 将 z 方向旋转到空间某个方向 $\mathbf{n}$, 相应的酉变换 $U(\mathcal{R})$ 将角动量分量 J_z 变换到 $J_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}$,

$$J_n = U(\mathcal{R}) J_z U^\dagger(\mathcal{R})$$

可以看到, 满足 (7) 的量子态 $|\psi\rangle$ 是 J_n 的本征态, 相应的本征值为 $j\hbar$, 这是因为,

$$J_n\,|\psi\rangle = U(\mathcal{R}) J_z U^\dagger(\mathcal{R}) \big(U(\mathcal{R})\,|j, j\rangle\big) = U(\mathcal{R}) J_z\,|j, j\rangle = j\hbar\big(U(\mathcal{R})\,|j, j\rangle\big) = j\hbar\,|\psi\rangle$$

我们把 J_n 的与本征值 $j\hbar$ 对应的本征态记作 $|\mathbf{n}\rangle$, 即 $J_n\,|\mathbf{n}\rangle = j\hbar\,|\mathbf{n}\rangle$, 它们是角动量相干态.

现在考虑 $|\mathbf{n}\rangle$ 的具体形式. 因为 $|\mathbf{n}\rangle = U(\mathcal{R})\,|j, j\rangle$, 所以需要知道 $U(\mathcal{R})$. 设方向 $\mathbf{n}$ 的方位角是 (θ, ϕ), 可以这样描述将 z 方向变换到 $\mathbf{n}$ 方向的变换: 首先绕 y 轴转动角度 θ, 然后绕 z 轴转动角度 ϕ. 于是 $U(\mathcal{R})$ 可以表示为

$$U(\mathcal{R}) = e^{-i\phi J_z/\hbar} e^{-i\theta J_y/\hbar} \tag{8}$$

为了得到 U 的矩阵元, 仅仅需要关注绕 y 轴的旋转变换, 即 $e^{-i\theta J_y/\hbar}$, 这也就是矩阵 $d^{(j)}(\theta)$. 在课堂上讲过 $j = \frac{1}{2}$ 和 $j = 1$ 的矩阵形式, 对于一般的 j, 参看 Sakurai 书的公式 (3.8.33), 抄录如下,

$$d^{(j)}_{m'm}(\theta) = \sum_k (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j+m-k)!(j-k-m')!(k-m+m')!}$$
$$\times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j-2k+m-m'} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k-m+m'} \tag{9}$$

关于上式, 有两点需要解释:

1. 对 k 的求和有这样的条件: k 取整数, 并且使得上式的分母中不会出现负数的阶乘.
2. 在有些文献中, 式中符号项可能会写成 $(-1)^k$.

针对 $j = \frac{1}{2}$ 的情形验证一下. 当 $j = \frac{1}{2}$ 时, 首先考虑矩阵 $d^{(1/2)}$ 的第一行第一列的矩阵元, 即 $m' = m = \frac{1}{2}$. 为了使 (9) 式分母不出现负数的阶乘, k 要满足如下条件,

$$\left.\begin{aligned} & k \geqslant 0 \\ & 1 - k \geqslant 0 \\ & -k \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \implies k = 0, \quad (-1)^{k-m+m'} = +1$$

所以

$$d^{(1/2)}_{1/2,1/2}(\theta) = \cos\frac{\theta}{2}$$

再考虑 $m' = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{2}$ 的矩阵元, 此时, k 应该满足

$$\left.\begin{aligned} &k \geqslant 0 \\ &-k \geqslant 0 \\ &k+1 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \implies k = 0, \quad (-1)^{k-m+m'} = -1$$

所以

$$d^{(1/2)}_{1/2,-1/2}(\theta) = -\sin\frac{\theta}{2}$$

其余两个矩阵元不再继续算了, 最终有

$$d^{(1/2)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

回到 (8) 式, U 的矩阵元可以表示为

$$U_{m'm}(\theta,\phi) = e^{-im'\phi} d^{(j)}_{m'm}(\theta)$$

于是可以得到 $|\mathbf{n}\rangle = U(\theta,\phi)\,|j,j\rangle$ 的具体表达式.

最后补充一个关于 $|\mathbf{n}\rangle$ 的性质: overcomplete basis.

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin\theta\, |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| = \frac{4\pi}{2j+1}\mathbb{1}$$