作业四

2019/12/11

问题 1 X 和 P_x 分别是粒子在 x 方向上的位置算子和动量算子,

1. 计算对易子

$$\left[X, \exp\left(\frac{iaP_x}{\hbar}\right)\right]$$

2. 利用上面得到的结果证明 $\exp\left(\frac{iaP_x}{\hbar}\right)|x'\rangle$ 是 X 的本征态, 对应的本征值是多少?

问题 2 考虑粒子在一维势 $V(x)$ 中的运动. 哈密顿量的本质函数记作 $\varphi(x)$. 证明: 如果

$$\varphi(x) \xrightarrow{x\to\pm\infty} 0,$$

那么, 除了相因子的差异, 哈密顿量的本征值是非简并的, 而且 $\varphi(x)$ 是实函数.

问题 3 一维无限深方势阱, 粒子被限定在 $0 < x < a$ 范围. 初始时刻系统的波函数为

$$\psi(x) = A\left[\sin\left(\frac{5\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) - \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right]$$

其中 A 为归一化常数.

1. 初始时刻用仪器测量系统的能量, 发现系统处于基态的几率是多少?

2. 写出 t 时刻系统的波函数.

问题 4 质量为 m 的粒子被限制在宽度为 a 的一维无限深方势阱中, $0 < x < a$.

1. 在初始时刻 $t = 0$, 测量粒子的能量, 发现处于基态的几率是 $\frac{1}{2}$, 处于第一激发态的几率也是 $\frac{1}{2}$. 写出 t 时刻系统波函数的一般形式.

2. 在上一个问题中, 如果初始时刻粒子的平均位置 $\bar{x} = \langle X\rangle > a/2$, 且偏离势阱中心最远, 求出此时粒子的波函数.

问题 5 粒子被限制在宽度为 a 的一维无限深势阱中, 粒子的初态 $|\psi(0)\rangle$ 是基态和第一激发态的叠加. 考虑 t 时刻的量子态 $|\psi(t)\rangle$. 如果允许相位上的差异, 在什么时刻粒子的状态回到初始时刻的量子态? 也就是说, 什么时刻有 $|\psi(t)\rangle\langle\psi(0)| = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|$?

如果换作一维谐振子呢?

实际上, 这相当于一个 $\mathbb{C}^2$ 空间中的问题. 在哈密顿量的支配下, 粒子的量子态的演化始终被限制在初态所在的两维子空间中. 回到初始时刻量子态所用时间取决于能级差. 与自旋 1/2 粒子在匀强磁场中的运动作比较.

问题 6 在一维定态束缚态问题中, 系统的哈密顿量为

$$H=\frac{P^2}{2m}+V(X)$$

哈密顿量的本征值设为离散的, 记作 E_m, 相应的本征向量记作 $|m\rangle$.

1. 计算 $[X,[X,H]]$.
2. 证明

$$\sum_n (E_n-E_m)\big|\langle m|X|n\rangle\big|^2=\frac{\hbar^2}{2m}$$

问题 7 质量为 m 的粒子在一维势 $V(x)$ 中运动. 假设其能量为 $E=\frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}$, 相应的本征函数是 $\varphi(x)=\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\frac{1}{2}\gamma^2x^2}$, 这里 γ 是一个正实数.

- 计算粒子的平均位置和平均动量.
- 给出势能函数.
- 计算粒子动量的几率密度.

问题 8 考虑粒子在三维空间中的运动. 位置算子是 $\mathbf{R}=(X,Y,Z)$, 定义径向距离算子 R,

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

$F(R)$ 是 R 的算子函数. 粒子在中心对称势场中的势能 $V(R)$ 就是一个例子.

现在考虑 $F(R)$ 在动量表象中的表示. 动量的基向量为 $|\mathbf{p}\rangle$. 计算

$$\langle\mathbf{p}''|F(R)|\mathbf{p}'\rangle$$

尽量化简.

问题 9 考虑粒子在三维空间中的运动. 哈密顿量是

$$H=\frac{P^2}{2m}+V(R)$$

计算对易子 $[\mathbf{R}\cdot\mathbf{P},H]$, 并进一步证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\rangle=\left\langle\frac{P^2}{m}\right\rangle-\langle\mathbf{R}\cdot\nabla V\rangle$$

在什么情况下可以得到与经典力学中的维里 (virial) 定理类比的形式?

问题 10 (Feynman-Hellmann Theorem) 设量子系统的哈密顿量的本征值和本征态分别是 E 和 $|\varphi_E\rangle$, 即

$$H|\varphi_E\rangle=E|\varphi_E\rangle$$

假说哈密顿量包含某个参数 λ, 即 $H=H(\lambda)$, 因而本征值与 λ 有关, 即 $E=E(\lambda)$. 证明

$$\left\langle\frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda}\right\rangle=\frac{\partial E(\lambda)}{\partial\lambda}$$

de Broglie 波和粒子的动量有如下关系

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

考虑一维运动的 Galileo 变换. 有两个参考系, 分别记作 R 和 R'. 其中 R 相对于 R' 以速度 v 匀速运动. 在这两个参考系中, 位置坐标和时间分别是 (x,t) 和 (x',t'), 二者间的联系是

$$x = x' + vt', \quad t = t'$$

在参考系 R 中, 一列行波的波函数可以表示为

$$f(x,t) = a\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \omega t\right)$$

其中 a 是振幅, λ 是波长, ω 是频率.

在参考系 R' 中, 波函数记作 $f'(x',t')$, 而且

$$f'(x',t') = f(x,t)$$

将 $x = x' - vt'$, $t = t'$ 代入, 有

$$f'(x',t') = a\sin 2\pi\left[\frac{x'}{\lambda} - \left(\omega + \frac{v}{\lambda}\right)t'\right]$$

因此, 从 R' 中的观测者看来, 行波的波长没有改变, 仍然是 λ, 但是频率变为

$$\omega' = \omega + \frac{v}{\lambda}$$

频率的变化体现了非相对论情形下的 Doppler 效应.

另一方面, 在两个参考系中粒子的动量有如下关系

$$p' = p + mv$$

这来自于

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} \tag{1}$$

于是出现了一个关于波粒二象性的佯谬: 在两个不同的参考系中, 虽然 de Broglie 波的波长没有改变, 但是动量却改变了, 因此, 波粒二象性给出的关系 $p = \frac{h}{\lambda}$ 是不正确的.

出现这个问题的原因在于, 将量子力学中的波函数当成了描述经典波动现象的波函数. $f'(x',t') = f(x,t)$ 对于经典波是成立的, 但是不能要求量子力学中的波函数也满足这个条件.

问题 11 考虑一维自由粒子的运动. 在参考系 R' 中, 用 $\Psi'(x',t')$ 表示粒子的波函数. Schrödinger 方程是

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t'}\Psi'(x',t') = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi'(x',t')}{\partial x'^2} \tag{2}$$

显然 $\Psi(x',t')$ 的形式是平面波.

现在要变换到在参考系 R 中. 用 $\Psi(x,t)$ 表示 R 中粒子的波函数. 注意到两个参考系之间微分算子的关系 (3), 将其代入 (4) 式后, 不能保证 Schrödinger 方程形式不变. 这时应该注意到, 在两个不同的参考系中, 几率密度应该满足

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\Psi'(x',t')|^2$$

这就意味着两个波函数之间可以有相因子的差别, 即 $\Psi(x,t) = e^{i\gamma}\Psi'(x',t')$. 其中 γ 是空间和时间的函数.

确定 γ, 使得在参考系中 R 中 Schrödinger 方程形式不变. 然后再尝试解释前面提到的佯谬.