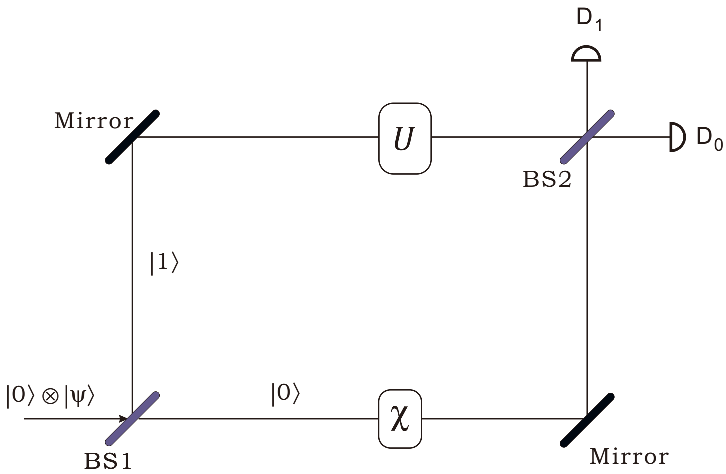
作业三

2019/11/15

问题 1 回顾 Mach-Zehnder 干涉仪 (如下图所示).



在探测器 D_0 上观测到粒子的几率是

$$p_0 = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{Re}\big(e^{-i\chi}\langle\psi|U|\psi\rangle\big)\right]$$

现在, 设 $U = \sigma_x$, 即自旋翻转操作, 粒子的初态 $|\psi\rangle$ 是 σ_z 的本征态 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$, 那么, 由于 $\langle 0|\sigma_x|0\rangle = \langle 1|\sigma_x|1\rangle = 0$, 在探测器上观测不到干涉现象. 如果将初态 $|\psi\rangle$ 设置为 $|x+\rangle$ 或者 $|x-\rangle$, 那么, 由于 $\langle x\pm|\sigma_x|x\pm\rangle = \pm 1$, 可以在探测器上观测到最为明显的干涉现象.

现在分析图 1 所示的实验过程.

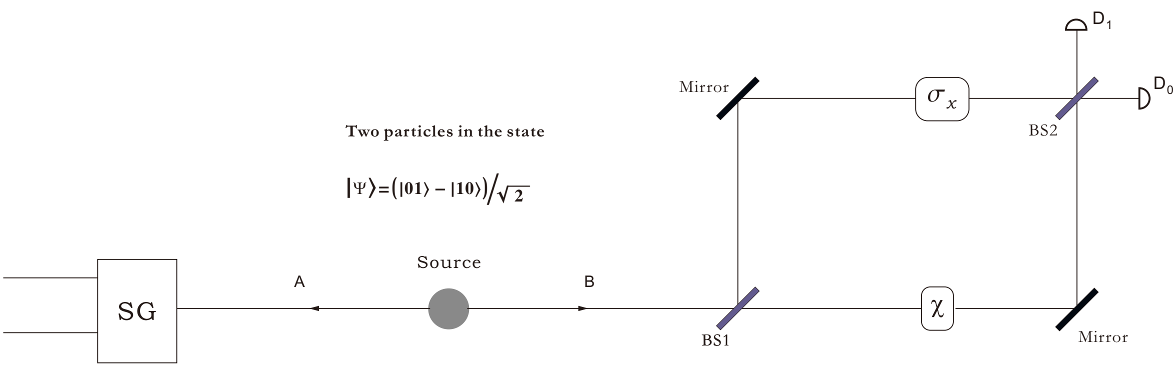


图 1

源发出两个自旋为 1/2 的粒子, 两个粒子处于自旋单态

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \tag{1}$$

根据角动量一章中的内容, 我们知道, $|\Psi\rangle$ 的总的角动量为零, 并且总角动量在 z 方向上的分量亦为零. 可以形象地说, 源原先处于自旋为零的静止状态, 在某个时候裂变为两个质量相同的粒子 A 和 B, 每个粒子的自旋均为 1/2. 由于角动量守恒, A 和 B 的自旋指向总是相反的. A 向左运动, B 向右运动. 由于动量守恒, 它们的速度大小相同, 方向相反.

(1) 的形式只能表明 A 和 B 各自的自旋角动量的 z 分量指向相反. 但是, 注意到

$$|0\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}|n+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|n-\rangle\right),$$

$$|1\rangle = e^{-i\frac{\phi}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}|n+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|n-\rangle\right)$$

我们可以把 $|\Psi\rangle$ 表示为

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|n+\rangle|n-\rangle - |n-\rangle|n+\rangle\big).$$

这个形式说明 A 和 B 的各自的自旋角动量在任意方向上的指向总是彼此相反的.

现在, 向左运动的 A 粒子进入 SG 装置, 向右运动的 B 粒子进入 MZ 干涉仪. SG 中的磁场梯度的指向有两种选择, 一个是指向 z 方向, 另一个是指向 x 方向. 我们来比较两种不同的选择.

- $SG(z)$ 装置. A 粒子通过 $SG(z)$ 装置以后, 偏转方向是 $\pm z$ 方向. 如果我们在 $SG(z)$ 的出口观测到偏向 $+z$ 或者偏向 $-z$ 的粒子, 那么可以断定 B 粒子处于量子态是 $|1\rangle$ 或者 $|0\rangle$. 对于这种情况, 前面的分析指出, 不会在 MZ 干涉仪中出现干涉现象.

- $SG(x)$ 装置. A 粒子通过 $SG(x)$ 装置以后, 偏转方向是 $\pm x$ 方向. 如果我们在 $SG(x)$ 的出口观测到偏向 $+x$ 或者偏向 $-x$ 的粒子, 那么可以断定 B 粒子处于量子态是 $|x-\rangle$ 或者 $|x+\rangle$. 对于这种情况, 前面的分析指出, 一定会在 MZ 干涉仪中出现干涉现象.

于是, 在左右两端距离甚远的时候, 左侧的测量方式的选择似乎可以在瞬间决定右侧的实验结果. 解释这个矛盾. ■

问题 2 考虑 $2\otimes 2$ 的简单的测量模型. 系统 Q 的初态设为

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

被测观测量是 σ_z.

设系统 Q 和仪器 M 作为两体量子系统随时间演化的酉算子是

$$\begin{aligned} U^{QM}(t) &= \exp\left\{igt\sigma_z^Q \otimes \sigma_y^M\right\} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau & 0 & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & 0 & \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \qquad (\text{其中 } \tau = gt) \end{aligned}$$

仪器的初态设为 $|\varphi\rangle = |x+\rangle$.

如果仪器的指针观测量选择为 σ_z^M, 那么观测结果的几率是

$$p(\sigma_z^M = +1) = \frac{1}{2}[1 + (c_0^2 - c_1^2)\sin 2\tau]$$

$$p(\sigma_z^M = -1) = \frac{1}{2}[1 - (c_0^2 - c_1^2)\sin 2\tau]$$

可以看到, 如果 τ 选择得不好, 那么就不是理想测量.

现在考虑这样的问题: 既然对于某个 τ, 指针观测量 σ_z^M 的测量结果是不理想的, 那么能否选择其它形式的指针观测量, 使其观测结果符合 Born 规则的结论? ■

问题 3 考虑由两个子系统 A 和 B 组成的两体量子系统. 描述这个两体系统的 Hilbert 空间是

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B = \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$$

每一个子系统所在的 Hilbert 空间都是 $\mathbb{C}^N$.

将 $\mathcal{H}$ 中的一个纯态表示为

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\mu=1}^{N} c_{i\mu} |i\rangle \otimes |\mu\rangle$$

其中 $|i\rangle$ 和 $|\mu\rangle$ 分别是 $\mathcal{H}^A$ 和 $\mathcal{H}^B$ 的基向量. 定义一个 $N \times N$ 的矩阵 C

$$C = \sum_{i,\mu=1}^{N} c_{i\mu} |i\rangle\langle\mu|$$

证明, 两个约化密度矩阵可以表示为

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B\, \Psi = CC^\dagger, \quad \rho^B = \mathrm{Tr}_A\, \Psi = C^T C^*$$ ■

问题 4 考虑 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 中的两体双值量子系统, 两体量子态设为 ρ. 对子系统 A 作广义量子测量, 测量算子 (即操作算子或 Kraus 算子) 记作 K_μ, 相应的效果算子是 $E_\mu = K_\mu^\dagger K_\mu$. 得到某个结果 (记作 μ) 的时候, 系统处于未归一的量子态

$$(K_\mu \otimes \mathbb{1})\rho(K_\mu^\dagger \otimes \mathbb{1})$$

该结果出现的几率是对上式求迹,

$$p_\mu = \mathrm{Tr}\left[(K_\mu \otimes \mathbb{1})\rho(K_\mu^\dagger \otimes \mathbb{1})\right] = \mathrm{Tr}\left[(E_\mu \otimes \mathbb{1})\rho\right]$$

得到结果 μ 的时候, 子系统 B 的归一化的量子态是

$$\begin{aligned}\rho_\mu^B &= \frac{1}{p_\mu}\mathrm{Tr}_A\left[(K_\mu \otimes \mathbb{1})\rho(K_\mu^\dagger \otimes \mathbb{1})\right] \\ &= \frac{1}{p_\mu}\mathrm{Tr}_A\left[(E_\mu \otimes \mathbb{1})\rho\right] \quad \text{这一步需要验证一下} \qquad (2)\end{aligned}$$

现在我们的目的是给出 M_μ 和 ρ_μ^B 之间更直接的关系.

注意到 M_μ 和 ρ_μ^B 都是 $\mathbb{C}^2$ 上厄密矩阵, 可以用单位阵和三个 Pauli 矩阵展开,

$$E_\mu = \sum_{i=0}^{3} x_i \sigma_i \qquad (3)$$

$$\rho_\mu^B = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} y_j \sigma_j \tag{4}$$

其中 $\sigma_0 = \mathbb{1}$, $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$.

定义两个 4-矢量,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

还应该注意到, $\vec{y}$ 描述的是 ρ_μ^B, 因此 $y_0 = 1$, 并且 (y_1, y_2, y_3) 构成 ρ_μ^B 的 Bloch 向量.

我们还知道, 两体量子态 ρ 可以表示为

$$\rho = \frac{1}{4}\sum_{i,j=0}^{3} r_{ij}\sigma_i \otimes \sigma_j \tag{5}$$

其中 16 个 r_{ij} 都是实数, $r_{ij} = \mathrm{Tr}\left[\rho(\sigma_i \otimes \sigma_j)\right]$. 将这 16 个 r_{ij} 组成一个 4×4 的矩阵, 记作 R, 它的第 i 行第 j 列的矩阵元是 $r_{i+1,j+1}$.

将 E_μ 的形式 (3) 和 ρ 的形式 (5) 代入 (2) 的右端, 通过直接运算证明下面的结论:

$$\boxed{p_\mu \vec{y} = R^T \vec{x}} \tag{6}$$

■

其中 R^T 是 R 的转置.

可以了解但不需要证明的进一步的结论是, 对 A 任何测量导致的 B 的量子态的 Bloch 向量分布在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个椭球中, 该椭球被称为 steering ellipsoid, 是讨论 quantum steering 的有用工具. ■

问题 5 验算并分析讲义 5-2 最后的内容. ■