作业二

2019/10/15

问题 1 以下形式中, 哪些可以用来表示量子态? 哪些是纯态?

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\rho_5 = \frac{1}{3}|u\rangle\langle u| + \frac{2}{3}|v\rangle\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}|u\rangle\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}|v\rangle\langle u|$$

其中在 ρ_5 中, $\langle u|u\rangle = \langle v|v\rangle = 1$, $\langle u|v\rangle = 0$. ■

问题 2 设系统的某个观测量可以在三维复空间 $\mathbb{C}^3$ 上表示为厄密矩阵 A,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

当系统分别处于下列三种状态时, 计算得到观测结果 0 的几率.

$$\text{(a)} \quad \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \quad \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \quad \rho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ ■

问题 3 (从另一个角度看纯态的密度矩阵) 设 $|\psi\rangle$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的单位向量, 即

$$|\psi\rangle = \xi|0\rangle + \eta|1\rangle \in \mathbb{C}^2, \quad |\xi|^2 + |\eta|^2 = 1.$$

因此, $|\psi\rangle$ 中的实参数有三个. 可以认为 $|\psi\rangle$ 对应于 $\mathbb{R}^4$ 空间中的单位球面 $\mathcal{S}^3$ 上的点, $|\psi\rangle \in \mathcal{S}^3$.

现在重新考虑 $|\psi\rangle$ 的表示.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ \eta\xi^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= |\xi| \begin{pmatrix} 1 \\ \eta\xi^{-1} \end{pmatrix} e^{i\delta} = \frac{1}{\sqrt{1+|c|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} e^{i\delta}$$

其中 $c=\eta\xi^{-1}$, δ 是 ξ 的幅角. 把 ξ 和 η 写为

$$\xi=\xi_1+i\xi_2,\quad \eta=\eta_1+i\eta_2,\quad \xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}.$$

接着把复数 c 表示为

$$\begin{aligned} c&=\frac{\eta}{\xi}=\frac{\xi^*\eta}{|\xi|^2}\\ &=\frac{(\xi_1-i\xi_2)(\eta_1+i\eta_2)}{\xi_1^2+\xi_2^2}\\ &=\frac{(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2)+i(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1)}{\xi_1^2+\xi_2^2}\end{aligned}$$

令

$$x_1=\mathrm{Re}(c)=\frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2}{\xi_1^2+\xi_2^2},\quad x_2=\mathrm{Im}(c)=\frac{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}{\xi_1^2+\xi_2^2}$$

于是 (x_1,x_2) 是二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点, 记作 P'. 利用 Stereographic projection (见图 1), 可以将 P' 点映射到单位球 $\mathcal{S}^2$ 上.

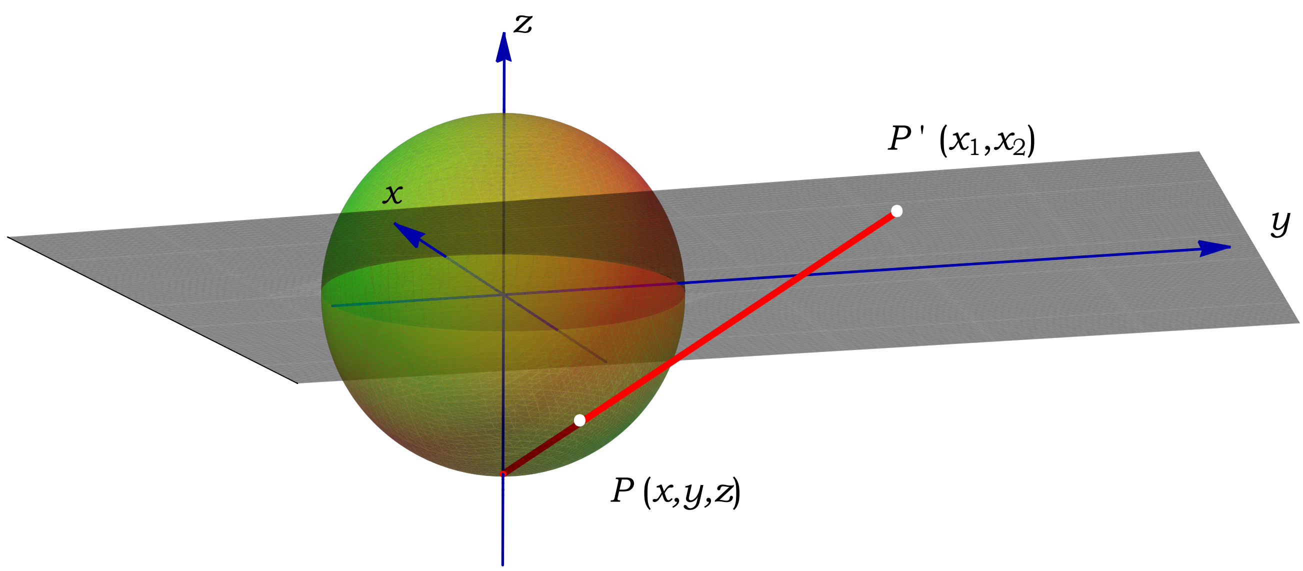

图 1: Stereographic projection

连接单位球 $\mathcal{S}^2$ 的南极点和 P' 点, 与 $\mathcal{S}^2$ 的交点记作 P, 点 P 的坐标是 (x,y,z), 满足 $x^2+y^2+z^2=1$.

- 用 x,y,z 表示 x_1 和 x_2.
- 进一步地用 $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2$ 表示 x,y,z.
- 验证如下关系

$$x=\langle\psi|\sigma_x|\psi\rangle,\quad y=\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle,\quad z=\langle\psi|\sigma_z|\psi\rangle.$$ ■

问题 4 (Pauli 矩阵的性质) 对于 Pauli 矩阵 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$, 考虑下面的问题.

1. 证明对任意的复数 c_1,c_2,c_3, 有:

$$(c_1\sigma_1+c_2\sigma_2+c_3\sigma_3)^2=\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)\mathbb{1}$$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个向量算子, 即

$$\boldsymbol{A} = (A_x,\ A_y, A_z), \quad \boldsymbol{B} = (B_x,\ B_y, B_z)$$

Pauli 矩阵的向量算子形式记作 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z)$, 计算

$$\mathrm{Tr}\left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})\right]$$

$$\mathrm{Tr}\left[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{C})\right]$$

3. 证明

- 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的三个分量算子都对易的非零二维矩阵必为单位矩阵的常数倍.
- 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的三个分量都反对易的非零二维矩阵不存在.

4. 证明

$$\exp\left\{i\lambda\sigma_n\right\}\boldsymbol{\sigma}\exp\left\{-i\lambda\sigma_n\right\} = \boldsymbol{\sigma} + \left(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}\right)\times\boldsymbol{n}\cos 2\lambda + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\sigma}\sin 2\lambda$$

其中 λ 为实常数, $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$, 这里的 $\boldsymbol{n}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量. ■

问题 5 某粒子只有三种可能的状态, 分别记作 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$. 以这三个态为基, 系统的哈密顿量 H 和某个观测量 X 表示为如下矩阵:

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 E_0 是一个具有能量量纲的常数, a 是一个具有长度量纲的常数.

1. 写出能量本征态的列向量表示和对应本征值.
2. 如果对 X 做观测, 可能的观测值有哪些? 如果现在观测到粒子位于最大位置处, 粒子具有不同的能量的概率分别为多少? ■

问题 6 考虑一个三能级系统. 我们可以在 $\mathbb{C}^3$ 空间中描述该系统的态. 设在一组特定的基向量 $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ 上, 系统的哈密顿量 H 和另外两个可观测量 A, B 可以表示为

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

其中 ω_0, a 和 b 均为实常数.

假设在 $t = 0$ 时刻, 系统的初态为

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle.$$

1. 如果在 $t = 0$ 时刻测量系统的能量, 那么将得到怎样的结果? 几率为多少? 计算系统能量的平均值.
2. 写出 t 时刻系统的态 $|\psi(t)\rangle$ 的形式. 并求出 t 时刻力学量 A 和 B 的期望值 $\langle A\rangle(t)$, $\langle B\rangle(t)$.
3. 描述在 t 时刻对力学量 A 的测量结果. ■

问题 7 ($\mathbb{C}^2$ 空间中的单位向量, 相位) 设 $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ 和 $|\psi_3\rangle$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的三个单位向量. 考虑如下形式的内积的相乘,

$$\Gamma = \langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_3\rangle\langle\psi_3|\psi_1\rangle .$$

一般地, Γ 是一个复数, 可以写为 $\Gamma = |\Gamma|e^{i\gamma}$. 我们关注幅角 $\gamma = \arg(\Gamma)$.

1. 考虑一个特殊情形. 令

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = |x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = |y+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}.$$

   计算 γ.

2. 如果用密度矩阵来说, 可以定义三个矩阵 $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ $(i = 1, 2, 3)$, 而且可以将它们表示为 $\rho_i = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma})$, 写出三个单位向量 $\mathbf{n}_i$ 的具体形式. 考虑三个单位向量 $\mathbf{n}_i$ 张成的立体角, 其大小记作 Ω. 立体角 Ω 和幅角 γ 之间是什么关系?

3. 分段构造合适的哈密顿量, 实现这样的演化过程: 量子态的 Bloch 向量从 $\mathbf{n}_1$ 沿 Bloch 球面的测地线 (相当于经线) 演化到 $\mathbf{n}_2$, 再沿测地线 (相当于赤道) 演化到 $\mathbf{n}_3$, 最后沿测地线 (相当于另一条经线) 回到 $\mathbf{n}_1$. 分段计算几何相, 再计算整个过程的几何相. ■

问题 8 (量子 Zeno 效应的 SG 版本) 开始的时候, 磁场方向设定在 z 方向. 让一束自旋为 1/2 的粒子通过 SG 装置, 并选择向 $+z$ 方向偏转的那一束, 即, 被选择的粒子可以用量子态 $|0\rangle$ 描述, $|0\rangle$ 是 Pauli 矩阵 σ_z 的本征值为 $+1$ 的本征向量. 这个过程可以视作初态的制备, 姑且说是第 0 个 SG 实验.

然后, 做第 1 个 SG 实验. 改变磁场的方向, 使之绕 y 轴旋转, 与 z 的夹角为 ϵ. 让第 0 步制备的粒子通过该装置, 选择向正方向编转的粒子束.

第 2 个实验: 继续绕 y 轴旋磁场, 使之与 z 的夹角为 2ϵ. 让第 1 步得到的粒子束通过该装置, 并选择向正方向偏转的粒子束.

重复上面的步骤, 在第 n 步, 磁场的方向与 z 轴的夹角为 $\theta = n\epsilon$, 让第 $n-1$ 步得到的粒子束通过, 选择向正方向偏转的粒子束.

我们的问题是, 经过 n 步实验后, 还剩下百分之多少的粒子?

进一步地, 令 $n \to \infty$, 并且 $\epsilon = \theta/n \to 0$, 在该情形下回答上述问题. ■

在接下来的问题中, 我们要考虑一个复杂一些的表象变换. 自旋为 1 的粒子的自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 在 x, y, z 三个方向上的分量分别记作 S_x, S_y, S_z. 它们满足对易关系

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, \tag{1}$$

以及循环置换的形式. 它们的矩阵形式是

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}, \quad S_z = \hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

注意到 S_z 具有对角形式, 可以说这是在 S_z 表象中的表示.

另一方面, 我们还可以把它们表示为

$$J_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

可以验证, (2) 中的表示也满足 (1) 式中的对易关系. 以下令 $\hbar = 1$.

我们的目的是, 找到一个酉变换 U, 使得 $US_kU^\dagger = J_k$, 其中 $k = x, y, z$. 为此, 我们可以先考虑 S_z 和 J_z 的本征向量, 分别记作 $|\zeta_i\rangle$ 和 $|\eta_j\rangle$, 这里的下标 $i, j \in \{-1, 0, +1\}$, 对应于 S_z 和 J_z 的本征值.

$$|\zeta_{+1}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\zeta_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\zeta_{-1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|\eta_{+1}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\eta_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\eta_{-1}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

然后构造一个酉变换 V,

$$V = |\eta_{+1}\rangle\langle\zeta_{+1}| + |\eta_0\rangle\langle\zeta_0| + |\eta_{-1}\rangle\langle\zeta_{-1}|$$

容易验证, $VS_zV^\dagger = J_z$. 但是, 让 V 作用于 S_x 和 S_y 之后, 发现

$$VS_xV^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad VS_yV^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个结果与 J_x 和 J_y 还有很大差距. 于是考虑对 V 作一个修正, 令

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V.$$

计算后发现

$$WS_zW^\dagger = J_z,$$

$$WS_xW^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad WS_yW^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

至此, 变换后的非零矩阵元的位置与 J_x 和 J_y 是相同的了. 但是还需要进一步对 W 作修正才能达到我们的目的.

问题 9 基于上述分析, 写出酉变换 U 的形式. ■