

作业一

2019/09/20

从今往后, 在涉及算子运算的题目中, 要尽量使用 Dirac 符号.

问题 1 阅读 Sakurai 书第 1 章. ■

问题 2 抛掷一枚硬币, 正面朝上的概率是 0.5, 反面朝上的概率也是 0.5.

1. 抛 100 次和抛 200 次, 有一半正面朝上的概率分别是多少?
2. 抛 100 次和抛 200 次, 分别计算正面朝上的硬币的百分比介于 45% 和 55% 之间的概率. ■

问题 3 设想有一个盒子, 可以储存光子. 盒子里储存了 10^6 个沿 x 方向偏振的光子和 10^6 个沿 y 方向偏振的光子. 盒子的尺寸远大于光子的相干波长, 所以可以忽略光子所遵从的 Bose 统计. 另有一个相同的盒子, 里面储存了 10^6 个左旋圆偏振光子和 10^6 个右旋圆偏振光子. 现在, 给你其中一个盒子, 当然不会告诉你盒子里面储存的光子有着怎样的偏振行为. 你可以将盒子里的光子一一引出来进行测量, 而且假设测量装置是理想的. 你能否通过观测来确定给你的到底是哪一个盒子? 如果可以, 估算一下猜测失败的可能性有多大? ■

问题 4 查阅数学书, 证明 Riesz 定理. ■

问题 5 考虑 \mathbb{C}^n 中的向量和矩阵和线性变换. 设 $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathbb{C}^n$, $X \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. 证明如下等式.

- (1) $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|) = \langle\varphi|\psi\rangle$.
- (2) $\langle\psi|X|\varphi\rangle = \text{Tr}(X|\varphi\rangle\langle\psi|)$ ■

问题 6 如果线性算子 A 具有性质 $A^\dagger = -A$, 那么这样的算子称作反厄密算子. 证明: 任意一个算子 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 都可以表示为一个厄密算子和一个反厄密算子的和. ■

问题 7 对于任意的 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, 如果算子 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ 满足条件

$$\langle\psi|X|\psi\rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle^*$$

那么证明 X 是厄密算子.

更一般的情形是, 如果对于任意的 $|\psi\rangle$, 两个算子 A 和 B 满足 $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle$, 那么 $A = B$. ■

问题 8 证明算子 A 的迹 $\text{Tr}(A)$ 不依赖于 Hilbert 空间的基向量的选择, 或者说, 不依赖于表象的选择. ■