第一次作业参考解答

王英洁

2019 年 10 月 20 日

目录

问题一 阅读

阅读 *Sakurai* 书第一章。

问题二　抛硬币

抛掷一枚硬币，正面朝上的概率是 0:5，反面朝上的概率也是 0:5.

1. *抛 100 次和抛 200 次，有一半正面朝上的概率分别是多少？*
2. *抛 100 次和抛 200 次，分别计算正面朝上的硬币的百分比介于 45% 和 55% 之间的概率.*

2.1　第一问

根据二项分布的知识，抛 n 次有 k 次正面向上的概率为

$$P(n,k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

于是答案是

$$\begin{aligned}
P(100,50) &= \binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \\
&= \frac{12611418068195524166851562157}{158456325028528675187087900672} \\
&\approx 0.0795892 \\
P(200,100) &= \binom{200}{100}\left(\frac{1}{2}\right)^{200} \\
&= \frac{113185643320129101456755221346855204843130737094266671051 65}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} \\
&\approx 0.0563485
\end{aligned}$$

Mathematica

把以下代码喂给麦酱

```
P[n_]:= Binomial[n,n/2]/2^n; N@*P/@{100,200}
```

运行结果为

```
{0.0795892, 0.0563485}
```

我们还可以进一步观察 $P(n)$ 的性质，例如做一下渐进展开

```
Series[P[n], {n, \[Infinity], 2}]
```

得到

$$\sqrt{\frac{2}{n\pi}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{3}{2}}+\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}\right),$$

可见该概率渐进按 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 减小。

2.2　第二问

由二项分布知，(如果把介于理解成闭区间)

$$\begin{aligned}P(0.45n\leqslant k\leqslant 0.55n)&=\sum_{k=\lceil 0.45n\rceil}^{\lfloor 0.55n\rfloor}P(n,k)\\&=\sum_{k=\lceil 0.45n\rceil}^{\lfloor 0.55n\rfloor}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\end{aligned}$$

其中 $\lceil x\rceil:=\max\limits_{n\in\mathbb{Z},n\geqslant x}n$，$\lfloor x\rfloor:=\min\limits_{n\in\mathbb{Z},n\leqslant x}n$。即，

$$\begin{aligned}P_{100}&=\sum_{k=45}^{55}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\\&=\frac{288686419202284514212693899 93}{396140812571321687967719751 68},\\P_{200}&=\sum_{k=90}^{110}\binom{200}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}\\&=\frac{4331869834267954468353934533436433826253054107538230502083 5}{5021681388309344611068631538566133132881884355571227610316 8}\end{aligned}$$

Mathematica

这里要计算的 n 是整百，故可略去两种取整函数，让麦酱执行

```
Sum[Binomial[#,k]/2^#,{k,0.45#,0.55#}]&/@{100,200}
```

或者用内置函数告诉麦酱要算什么概率，让聪明的麦酱自己做题 (你已经是成熟的计算软件了，该学会自己做题了.jpg)

```
Probability[0.45#<=x<=0.55#,
x \[Distributed] BinomialDistribution[#, 0.5]]&/@{100,200}
```

麦酱说结果是

```
{0.728747, 0.862633}
```

PS: 如果把介于理解成开区间，则

$$\begin{aligned} P(0.45n < k < 0.55n) &= \sum_{k=\lfloor 0.45n \rfloor+1}^{\lceil 0.55n \rceil -1} P(n,k) \\ &= \sum_{k=\lfloor 0.45n \rfloor+1}^{\lceil 0.55n \rceil -1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} P_{100} &= \sum_{k=46}^{54} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \\ &= \frac{250281124693449401964743529 33}{396140812571321687967719751 68}, \\ P_{200} &= \sum_{k=91}^{109} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \\ &= \frac{4122981001808558946820685533057058189439842303191720491853 5}{5021681388309344611068631538566133132881884355571227610316 8} \end{aligned}$$

Mathematica

依然扔掉取整函数，让麦酱执行

```
Sum[Binomial[#,k]/2^#,{k,45#/100+1,55#/100-1}]&/@{100,200}//N
```

结果是

```
{0.631798, 0.821036}
```

Note

本题在批改时允许各种近似，包括斯特林近似和大数定律。没有给出具体数字的也判对。
PS：去年的助教用大数定律不给分……

问题三　区别盒子

设想有一个盒子，可以储存光子．盒子里储存了 10^6 个沿 x 方向偏振的光子和 10^6 个沿 y 方向偏振的光子．盒子的尺寸远大于光子的相干波长，所以可以忽略光子所遵从的 *Bose* 统计．另有一个相同的盒子，里面储存了 10^6 个左旋圆偏振光子和 10^6 个右旋圆偏振光子．现在，给你其中一个盒子，当然不会告诉你盒子里面储存的光子有着怎样的偏振行为．你可以将盒子里的光子一一引出来进行测量，而且假设测量装置是理想的．你能否通过观测来确定给你的到底是哪一个盒子？如果可以，估算一下猜测失败的可能性有多大？

首先明确圆偏振态与线偏振态。Sakurai 书中的 1.1.12 式给出了经典的电场偏振矢量的关系，右旋光的复偏振矢量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right],$$

而量子态则满足

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle\right),$$
$$|l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle - \mathrm{i}\,|y\rangle\right).$$

Note

事实上，右、左旋态是光子的螺度 (helicity) $\hat{\xi} := \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}$ 的 $\pm\hbar$ 本征态。

首先，如果我们抽取少部分光子进行测量，由于光子总数巨大，每次抽取可认为是独立的，相当于在测量一个含有无穷粒子的系综。于是考察密度算子，

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 &= \frac{1}{2}|x\rangle\langle x| + \frac{1}{2}|y\rangle\langle y|,\\
\hat{\rho}_2 &= \frac{1}{2}|l\rangle\langle l| + \frac{1}{2}|r\rangle\langle r|\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(|x\rangle - \mathrm{i}\,|y\rangle\right)\left(\langle x| + \mathrm{i}\,\langle y|\right) + \frac{1}{2}\left(|x\rangle + \mathrm{i}\,|y\rangle\right)\left(\langle x| - \mathrm{i}\,\langle y|\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(|x\rangle\langle x| + \cancel{\mathrm{i}\,|x\rangle\langle y|} - \cancel{\mathrm{i}\,|y\rangle\langle x|} + |y\rangle\langle y| + |x\rangle\langle x| - \cancel{\mathrm{i}\,|x\rangle\langle y|} + \cancel{\mathrm{i}\,|y\rangle\langle x|} + |y\rangle\langle y|\right)\\
&= \frac{1}{2}|x\rangle\langle x| + \frac{1}{2}|y\rangle\langle y|,
\end{aligned}$$

于是 $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$，仅抽取少量光子是无法区分的。

但是我们还可以考虑测量更多的光子。当我们把所有光子都测完时，之前由于抽取带来的 $\frac{1}{2}$ 的经典随机性完全丧失。如果采用 x 偏振片，盒一将有精确的 10^6 个通过，10^6 个不通过（题干说测量装置理想）；而盒二的每个光子都有一半概率通过，一半概率不通过，这是量子测量的随机性。根据上一题，我们知道因为光子总数很多，精确一半通过几乎是不可能的，于是成功区分的概率很大。也可使用波片加偏振片组合成“圆偏振片”来测量左右旋，效果一样。

失败概率的计算 把“失败”改写成一个明确的事件，这个有点微妙。记 $A =$“拿到盒一”, $B =$“拿到盒二”, $C =$“恰好通过一半”，

$$P(C|B) = \binom{2\times 10^6}{10^6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 10^6} \approx 0.00056419,$$

答这个的判对了。

$$P(B)P(C|B) = \frac{1}{2}P(C) \approx 0.000282095,$$

答这个的也判对了。

$$\begin{aligned}
P(B|C) &= \frac{P(B)P(C|B)}{P(C)} \\
&= \frac{P(B)P(C|B)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\binom{2\times 10^6}{10^6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 10^6}}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\binom{2\times 10^6}{10^6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2\times 10^6}} \\
&\approx 0.000563871,
\end{aligned}$$

答这个的应该是最准确的。

问题四 Riesz 定理

查阅数学书, 证明 Riesz 定理.

Theorem 1. *设 $\mathscr{H}$ 是 Hilbert space，$f \in \mathscr{H}^*$，则存在唯一的 $u_f \in \mathscr{H}$ 使得*

$$\forall v \in \mathscr{H}, f(v) = (u_f, v). \qquad \diamondsuit$$

Riesz 定理所要求的 u_f 是 $\mathscr{H}$ 中的,有的同学写了一圈,所做的事情只是把 $f \in \mathscr{H}^*$ 用 $\mathscr{H}^*$ 对偶基展开，这样是不对的，什么都没证。

4.1　有限维

有限维空间的好处在于存在有限的基底。

Proof 先证存在性。取 V 的一组正交归一基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$，n 是 V 的维数。则任取 $v \in V$，作展开 $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$，则

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n v^i f(e_i), \end{aligned}$$

令 $u_f = \sum_{i=1}^n (f(e_i))^* e_i$，则有

$$(u_f, v) = \sum_{i=1}^n f(e_i) v^i = f(v).$$

再证唯一性。设还有 $u_f' \in V$ 使得 $\forall v \in V, \quad (u_f', v) = f(v)$，则

$$\forall v \in V, \quad (u_f - u_f', v) = f(v) - f(v) = 0 \implies u_f' = u_f. \qquad \square$$

Note

要注意的是通过构造来证明时仅构造出一个，并不能说明唯一性，因为具体构造的条件 $\Rightarrow$ 需要的性质，反过来未必。可能存在另外的构造方式，得到另一个满足所要求性质的玩意儿，所以唯一性是需要另证的。

4.2　任意维

Definition

线性映射 $f\colon V \to W$ 的核 *(kernel)* 定义为 $\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$.

Definition

内积空间 V 的线性子空间 M 的正交补 *(orthogonal complement)* 定义为 $M^\perp := \{v \in V \mid \forall u \in M, (u, v) = 0\}$.

考虑有限维线性空间，$\ker f$ 是一张超曲面，其在零元处的法矢平行于要找的矢量。于是推广这样的几何直观，有如下不依赖于维数的做法：

Proof 若 $f=0$，则有 $f(v)=(0,v)$ 。否则，记 $K=\ker f$。由于 f 连续，$\ker f$ 是闭的。在 $K^{\perp}$ 里必存在一个矢量 w 使 $f(w)=1$。于是 $\forall v\in\mathscr{H}$，令 $u=v-f(v)w$，则显然

$$f(u)=f(v)-f(v)=0,$$

即 $u\in\ker f$。于是 u 和 w 正交，这给出

$$0=(w,u)=(w,v-f(v)w)=(w,v)-f(v)(w,w),$$

于是

$$f(v)=\left(\frac{w}{\|w\|^2},v\right),$$

故 $\dfrac{w}{\|w\|^2}$ 就是要找的矢量。

唯一性的证明同前。 □

Note

思考之前有限维的证明哪里不适用于无穷维。

也可沿用有限维的思路，我们补一个性质：

Property 1. 内积空间 V 和 W 之间的映射 $f\colon V\to W$ 是连续的当且仅当是有界 (bounded) 的，即存在非负实数 $\|f\|$ （称为 f 的范数）使得

$$\forall v\in V,\quad \|f(v)\|_W\leqslant\|f\|\|v\|_V.$$

♢

一个引理：

Lemma 1 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 *Hilbert space* $\mathscr{H}$ 中的正交归一集，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n$$

收敛当且仅当

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$$

收敛。 ♡

它们的证明略去。下面给出沿用有限维的思路的证明（感谢王云汉同学）

Proof 若 $\dim\mathscr{H}$ 有限，证明同前。否则，取 $\mathscr{H}$ 的正交归一基底 $\mathcal{B}=\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$，其中 I 是可数或不可数的指标集。不妨设 $f(e_\alpha)\geqslant 0$ 恒成立（否则给函数值小于 0 的基底乘 -1 即可，不改变正交归一）。

我们首先证明，$J=\{\alpha\in I\mid f(e_\alpha)\neq 0\}$ 是至多可数集。令

$$J_n:=\left\{\alpha\in I\mid f(e_\alpha)>\frac{1}{n}\right\},$$

我们断言 J_n 是有限集。否则，在 J_n 中可取得两两不同的一个序列 $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$，令

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}e_{\alpha_k},$$

由于 $\frac{1}{k}$ 平方和收敛，v 是存在的。而

$$f(v)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}f(e_{\alpha_k})>\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

不存在，矛盾。故每个 J_n 都是有限的，从而 $J=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ 是至多可数的。

(1) 若 J 是有限的，令 $u_f=\sum_{\alpha\in J}\left(f(e_\alpha)\right)^*e_\alpha$；

(2) 若 J 是可数的，记 $J=\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$。现在证明

$$u_f=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f(e_{\beta_n})\right)^*e_{\beta_n}$$

是存在的。则需要证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(e_{\beta_n})|^2$$

是收敛的。这里我们需要 *Property 1*，记 f 的范数为 $\|f\|$，令

$$u_f^{(m)}=\sum_{n=1}^{m}\left(f(e_{\beta_n})\right)^*e_{\beta_n},$$

则

$$f\left(u_f^{(m)}\right)=\sum_{n=1}^{m}|f(e_{\beta_n})|^2\leqslant\|f\|\left\|u_f^{(m)}\right\|=\|f\|\sqrt{\sum_{n=1}^{m}|f(e_{\beta_n})|^2}$$
$$\Longrightarrow\sum_{n=1}^{m}|f(e_{\beta_n})|^2\leqslant\|f\|^2,$$

部分和递增且有上界，则收敛性得证。

综上 *(1)(2)*，

$$u_f=\sum_{\alpha\in J}\left(f(e_\alpha)\right)^*e_\alpha$$

总是存在的。

现在考虑 $\forall v \in \mathscr{H}$，由于 $\mathscr{H} = \overline{\operatorname{Span}\mathcal{B}}$（正交归一基定义中的性质），存在至多可数的 $K \subset I$，使得 $v = \sum_{\alpha \in K}(e_\alpha, v)e_\alpha$，于是 $K = \{\alpha \in I \mid (e_\alpha, v) \neq 0\}$。计算得

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{\alpha \in K}(e_\alpha, v)f(e_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in J \cap K}(e_\alpha, v)f(e_\alpha), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} (u_f, v) &= \sum_{\alpha \in J} f(e_\alpha)(e_\alpha, v) \\ &= \sum_{\alpha \in J \cap K} f(e_\alpha)(e_\alpha, v), \end{aligned}$$

故 $f(v) = (u_f, v)$ 得证。

唯一性的证明同前。 $\square$

Note

顺便注意到 $u_{cf} = c^* u_f$，有同学说 $f \mapsto u_f$ 给出 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{H}^*$ 的同构，这只对实空间成立。

问题五　迹的等价定义

考虑 $\mathbb{C}^n$ 中的向量和矩阵和线性变换. 设 $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathbb{C}^n$, $X \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. 证明如下等式.

1. $\operatorname{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|) = \langle\varphi|\psi\rangle$;
2. $\langle\psi|X|\varphi\rangle = \operatorname{Tr}(X\,|\varphi\rangle\langle\psi|)$.

Note

事实上，第一小问是 Tr 的"basis-free" 等价定义：双线性映射

$$\begin{aligned} t\colon V \times V^* &\to \mathbb{F} \\ (\psi, \varphi^*) &\mapsto \varphi^*(\psi) \end{aligned}$$

通过张量积的 universal property 所诱导的 $\operatorname{Tr}\colon V \otimes V^* \to \mathbb{F}$:

$$\begin{tikzcd} V \times V^* \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "t"'] & & V \otimes V^* \arrow[dl, "\mathrm{Tr}"] \\ & \mathbb{F} & \end{tikzcd}$$

5.1 第一问

取一组基 $\mathcal{B}=\{|i\rangle\}_{i=1}^{n}$，直接计算得

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\varphi|) &= \sum_i \langle i|\left(|\psi\rangle\langle\varphi|\right)|i\rangle \\ &= \sum_i \langle\varphi|i\rangle\langle i|\psi\rangle \\ &= \langle\varphi|\psi\rangle\end{aligned}$$

5.2 第二问

由第一问，$\langle\psi|X|\varphi\rangle=\langle\psi|\left(X|\varphi\rangle\right)=\mathrm{Tr}(X|\varphi\rangle\langle\psi|)$。

Note

如果不放心可以检验一下 $X\left(|\varphi\rangle\langle\psi|\right)=\left(X|\varphi\rangle\right)\langle\psi|$ 是否成立，用数学系的记号写起来分别是 $X\circ(\varphi\otimes\psi^*)$ 和 $X(\varphi)\otimes\psi^*$，而 $\forall v\in V$，

$$\left(X\circ(\varphi\otimes\psi^*)\right)(v)=X((\psi,v)\varphi)=(\psi,v)X(v)=\left(X(\varphi)\otimes\psi^*\right)(v),$$

故而该“结合律”是成立的。

问题六　算子的分解

如果线性算子 A 具有性质 $A^\dagger=-A$, 那么这样的算子称作反厄密算子. 证明: 任意一个算子 $X\in\mathcal{L}(\mathscr{H})$ 都可以表示为一个厄密算子和一个反厄密算子的和.

Proof 任取 $X\in\mathcal{L}(\mathscr{H})$，令

$$\begin{aligned}A&=\frac{X+X^\dagger}{2},\\ B&=\frac{X-X^\dagger}{2},\end{aligned}$$

则 A 厄米，B 反厄米，证毕。 $\square$

问题七　算符由期望唯一决定

对于任意的 $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$, 如果算子 $X \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ 满足条件

$$\langle\psi|X|\psi\rangle = \langle\psi|X|\psi\rangle^*,$$

那么证明 X 是厄密算子.

更一般的情形是, 如果对于任意的 $|\psi\rangle$, 两个算子 A 和 B 满足 $\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|B|\psi\rangle$, 那么 $A = B$.

Note

要注意的是不能想当然，$A = 0$ 说的是 $\forall|\psi\rangle, A|\psi\rangle = 0$，而 $\forall|\psi\rangle, \langle\psi|A|\psi\rangle = 0$ 和 $A = 0$ 的关系是需要推导的。

Proof 注意到

$$(\psi, X\psi)^* = (X\psi, \psi) = (\psi, X^\dagger\psi),$$

我们首先证明一般情况。

令 $C = A - B$，则有 $\forall|\psi\rangle, \langle\psi|C|\psi\rangle = 0$，任取 $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$，注意到

$$\langle\psi+\varphi|C|\psi+\varphi\rangle = \langle\psi|C|\psi\rangle + \langle\psi|C|\varphi\rangle + \langle\varphi|C|\psi\rangle + \langle\varphi|C|\varphi\rangle,$$

则有

$$\langle\psi|C|\varphi\rangle + \langle\varphi|C|\psi\rangle = 0, \tag{1}$$

再用 $\mathrm{i}|\varphi\rangle$ 代替 $|\varphi\rangle$，得

$$\mathrm{i}\langle\psi|C|\varphi\rangle - \mathrm{i}\langle\varphi|C|\psi\rangle = 0, \tag{2}$$

(1) $-$ i (2) 得 $\langle\psi|C|\varphi\rangle = 0$，于是 $C = 0$。

回到之前的情况，则得 $X = X^\dagger$。 □

Note

得到 $\langle\psi|C|\varphi\rangle = 0$ 后能直接写 $C = 0$ 是因为 $|\psi\rangle$ 可以取到 $C|\varphi\rangle$ ，根据内积具有非退化性，即知 $C|\varphi\rangle = 0$。

Note

极化恒等式：

$$4\langle\psi|C|\phi\rangle=\langle\psi+\phi|C|\psi+\phi\rangle-\langle\psi-\phi|C|\psi-\phi\rangle-\mathrm{i}\langle\psi+\mathrm{i}\phi|C|\psi+\mathrm{i}\phi\rangle+\mathrm{i}\langle\psi-\mathrm{i}\phi|C|\psi-\mathrm{i}\phi\rangle$$

证明：注意到 $\forall C\in\mathcal{L}(\mathscr{H}),\quad |\psi\rangle,|\phi\rangle\in\mathscr{H}$，

$$\begin{aligned}
&\langle\psi+\phi|C|\psi+\phi\rangle-\langle\psi-\phi|C|\psi-\phi\rangle\\
=&\langle\psi|C|\psi\rangle+\langle\psi|C|\phi\rangle+\langle\phi|C|\psi\rangle+\langle\phi|C|\phi\rangle\\
&-(\langle\psi|C|\psi\rangle-\langle\psi|C|\phi\rangle-\langle\phi|C|\psi\rangle+\langle\phi|C|\phi\rangle)\\
=&2\langle\psi|C|\phi\rangle+2\langle\phi|C|\psi\rangle
\end{aligned}$$

利用内积对第一槽的反线性，还有

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\langle\psi+\mathrm{i}\phi|C|\psi+\mathrm{i}\phi\rangle+\mathrm{i}\langle\psi-\mathrm{i}\phi|C|\psi-\mathrm{i}\phi\rangle\\
=&-\mathrm{i}(2\langle\psi|C|\mathrm{i}\phi\rangle+2\langle\mathrm{i}\phi|C|\psi\rangle)\\
=&2\langle\psi|C|\phi\rangle-2\langle\phi|C|\psi\rangle
\end{aligned}$$

相加即得。

另证：

Proof 取一组正交归一基，易知 C 的对角元为零，则有分量形式

$$\begin{aligned}
\langle\psi|C|\psi\rangle&=\sum_{i,j}C_{i,j}\psi_i^*\psi_j\\
&=\sum_{(i,j)}C_{i,j}\psi_i^*\psi_j+C_{j,i}\psi_j^*\psi_i\\
&=0,
\end{aligned}$$

我们可以取定某对 i,j ，并选取 $|\psi\rangle$ 使得它只有 i,j 分量非零，则

$$C_{i,j}\psi_i^*\psi_j+C_{j,i}\psi_j^*\psi_i=0,$$

现在固定 ψ_j，则由于 ψ_i 和 ψ_i^* 线性独立（复平面上 z 和 z^* 是线性独立的两个函数），知 $C_{i,j}=C_{j,i}=0$。由于 i,j 是任取的，则知 $C=0$。 □

问题八　迹

证明算子 A 的迹 $\mathrm{Tr}(A)$ 不依赖于 Hilbert 空间的基向量的选择，或者说，不依赖于表象的选择.

Note

如果注意到之前提到的迹的 `basis-free` 定义，则这结论是显然的。

Proof 设有基底 $\{|e_i\rangle\}, \{|f_i\rangle\}$，$\forall A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}^{(e)}(A) &= \sum_i \langle e_i|A|e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle e_i|A|f_j\rangle \langle f_j|e_i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle f_j|\,|e_i\rangle\langle e_i|\,A\,|f_j\rangle \\
&= \sum_j \langle f_j|A|f_j\rangle \\
&= \mathrm{Tr}^{(f)}(A).
\end{aligned}$$

□