量子力学用到的 Hilbert 空间知识简介

王英洁

2019 年 11 月 18 日

摘要

本文简单梳理 Hilbert 空间相关的知识。

目录

1 Banach 空间与 Hilbert 空间

Definition 1 (复内积空间). 一个复线性空间 V 上规定一个二元运算 $\langle\cdot|\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$ 满足

1. $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$;
2. $\langle u|\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2\rangle = \alpha_1\langle u|v_1\rangle + \alpha_2\langle u|v_2\rangle$;
3. $\forall v\neq 0\in V,\quad \langle v|v\rangle \geqslant 0 \quad and \quad \langle v|v\rangle = 0 \implies v=0.$ ♣

Theorem 1 (Cauchy-Schawrz 不等式). 设 $(V,\langle\cdot|\cdot\rangle)$ 是内积空间,

$$\forall u,v\in V,\quad |\langle u|v\rangle|^2 \leqslant \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle\,. \tag{1}$$

♢

Definition 2 (复赋范空间). 复线性空间 V 上定义一个实值函数 $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ 若满足:

1. $\forall v\in V,\quad \|v\|\geqslant 0 \quad and \quad \|v\|=0\implies v=0$;
2. $\forall \alpha\in\mathbb{C}, v\in V,\quad \|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$;

3. $\forall u, v \in V, \quad \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|,$

则称 $\|\cdot\|$ 是一个范数，称 $(V, \|\cdot\|)$ 是一个（复）赋范空间。 ♣

Remark 1 由内积我们可以得到一个范数：

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{\langle v|v\rangle}. \end{aligned}$$

利用 Cauchy-Schawrz 不等式可以证明这确实是一个范数。内积空间必是赋范空间。 ♠

Remark 2 内积空间必为赋范空间，则对数学家来说一个有趣的问题是什么样的赋范空间 $(V, \|\cdot\|)$ 是由内积空间诱导的，下面的定理回答了这个问题。 ♠

Theorem 1 (Jordan-von Neumann). 设 V 是一个复线性空间，V 上的一个范数 $\|\cdot\|$ 是由某个内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 诱导的当且仅当该范数满足极化恒等式

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \tag{2}$$

此时，范数与内积通过

$$\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}; \tag{3}$$

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2 - \mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2\right) \tag{4}$$

相互唯一确定。 ♢

Proof 只需验证诱导范数满足极化恒等式 (2) 且 (4) 确实是内积。 □

Remark 3 定理 1 我们并不会用到，只是拓展，但是复内积空间的诱导范数满足上面出现的两个等式 (2),(4) 有时候还是会有用的。 ♠

Definition 3 (强收敛). 设赋范空间 V 中有序列 $\{v_n\}$ ，若

$$\exists v \in V \quad s.t. \quad \lim_{n\to\infty} \|v - v_n\| = 0,$$

则称 $\{v_n\}$ 强收敛到 v，记为 $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} v_n = v$。 ♣

除了强收敛还有弱收敛，虽然好像不会用到，我们还是给出其定义。

Definition 4 (弱收敛). 设赋范空间 V 中有序列 $\{v_n\}$，若

$$\exists v \in V \quad s.t. \quad \forall u \in V, \quad \lim_{n\to\infty} (u, v_n) = (u, v),$$

则称 $\{v_n\}$ 弱收敛到 v，记为 $\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} v_n = v$。 ♣

关于强弱收敛的联系，还记得微积分/数学分析里学的 $\varepsilon - \delta$ 语言怎么玩的同学不妨自己考虑一下。

Remark 4 今后谈论收敛都指强收敛。 ♠

有了收敛性的定义，我们可以进一步考虑完备性。

Definition 5 (柯西列). 若赋范空间 V 中的序列 $\{v_n\}$ 满足

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall m, n > N, \quad \|v_m - v_n\| < \varepsilon,$$

则称 $\{v_n\}$ 是柯西列。 ♣

Definition 6 (Banach 空间). 若赋范空间 V 中的柯西列必（强）收敛，则称 V 是完备的。完备复赋范空间称为 *Banach* 空间。 ♣

Example 1 记 $[0,1]$ 上的连续复值函数的集合为 $C^0[0,1]$，由于 $[0,1]$ 是紧致的（对 $\mathbb{R}$ 的子集来说，紧致就是有界闭），其上连续函数必有界。于是我们定义一个范数

$$\forall f \in C^0[0,1], \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} f(x),$$

称为上确界范数，则 $(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ 是 Banach 空间。 ♡

Proof 首先上确界范数显然确实是范数，因而 $(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ 是赋范空间，下证完备性。设有柯西列 $\{f_n\} \in C^0[0,1]$，任取 $x \in [0,1]$，注意到

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]} |f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_n\|_\infty,$$

则 $\{f_n(x)\}$ 是柯西列，由 $\mathbb{C}$ 的完备性，极限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在，于是定义函数 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$。

首先检查 f 的连续性……然后证明 $\{f_n\}$ 强收敛于 f ……（其实按上确界范数满足柯西性就是一致收敛，就不慢慢写 $\varepsilon - \delta$ 了）于是该空间完备，是 *Banach* 空间。 □

Definition 7 (Hilbert 空间). 若复内积空间 V 用内积诱导范数衡量是 *Banach* 空间，则称为一个 *Hilbert* 空间。即，*Hilbert* 空间是完备的复内积空间。 ♣

2 Banach 空间上的有界线性算子

Definition 8 (有界算子). 设 $(V, \|\cdot\|_V)$ 是赋范空间，$(W, \|\cdot\|_W)$ 是 *Banach* 空间，若线性算子 $A\colon V \to W$ 满足

$$\sup_{v\in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V} < \infty,$$

则称 A 为有界的 *(bounded)*。 ♣

Definition 9 (算子的范数). 设 $A\colon V \to W$ 是有界算子，则定义 A 的 *oprator norm* 为

$$\|A\| := \sup_{v\in V} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}$$ ♣

Property 1. 算子 $A\colon V \to W$ 是有界的有以下的等价表述：

1. $\sup_{\|v\|_V=1} \|Av\|_W < \infty$;
2. $\exists k > 0, \quad \forall v \in V, \quad \|Av\|_W < k\|v\|_V$;
3. $A\colon V \to W$ 是连续的；
4. $A\colon V \to W$ 在 0_V 处连续。 ♢

Proof *1,2* 等价和 *3,4* 等价都是比较简单的。这里证 *2,4* 等价。注意到 A在0_V连续 $\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \quad s.t. \quad \forall v \in V \quad s.t. \quad \|v\|_V < \delta, \|Av\|_W < \epsilon$,

1. $2 \implies 4$: 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ 即可。
2. $4 \implies 2$: 任意取定 ε，得一个 δ，现在任取 $v \in V$，有 $\left\|\frac{\delta}{2\|v\|_V} v\right\|_V = \frac{\delta}{2} < \delta$，故 $\left\|A\left(\frac{\delta}{2\|v\|_V} v\right)\right\|_W = \frac{\delta}{2\|v\|_V}\|Av\|_W < \varepsilon$，取 $k = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ 即满足要求。 □

Example 2 考虑 $[0, 1]$ 上的可微复值函数组成的集合 $C^1[0, 1]$，它是 $C^0[0, 1]$ 的子集，因此每个 $f \in C^1[0, 1]$ 也有一个上确界范数，考虑导数算子 $D\colon C^1[0, 1] \to C^0[0, 1]$，$D(f) := f'$，则 D 是无界的。取 $f_n(x) = \cos(2\pi nx)$ 即可。 ♡

α Lemma

设 $(V, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，若 V 中的序列 $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 u, v，$\mathbb{C}$ 中的序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 z，则有

1. $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = u + v$;

2. $\lim_{n\to\infty} z_n v_n = zv$;

3. $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \|v\|$. ♡

Proof 略。 □

Theorem 2. 设 $(V, \|\cdot\|_V)$ 是赋范空间，$(W, \|\cdot\|_W)$ 是 *Banach* 空间，记 V 到 W 的有界线性算子的集合为 $\mathcal{B}(V, W)$，则 $\mathcal{B}(V, W)$ 以逐点方式规定加法、数乘，再配上算符范数，构成一个 *Banach* 空间。 ♢

Proof 1. 首先证明 $\mathcal{B}(V, W)$ 以逐点方式规定加法、数乘，构成线性空间。$\forall A, B \in \mathcal{B}(V, W)$, 有

$$\|(A+B)v\|_W = \|Av + Bv\|_W \leqslant \|Av\|_W + \|Bv\|_W \leqslant (\|A\| + \|B\|)\,\|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$
$$\|(\lambda A)v\|_W = \|\lambda Av\|_W = \lambda \|Av\|_W,$$ □

故 $A + B$, λA 都是有界的，且 $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$，$\|\lambda A\| = \lambda \|A\|$.