

第五章 两体量子系统 II

1

最简单的两体量子系统

两个双值量子系统是最简单的两体量子系统, 记作 $2 \otimes 2$ 量子系统. 它可以用来讨论量子力学的基本问题.

1.1 量子态的表示

两个双值系统的量子态可以在自然基 $\{|i\rangle \otimes |\mu\rangle\}$ ($i, \mu = 0, 1$) 上展开,

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

在各自的 \mathbb{C}^2 空间中选择恰当的基向量, 可以有 Schmidt 分解的形式,

$$|\Psi\rangle = c_0|e_0\rangle|f_0\rangle + c_1|M_1\rangle|f_1\rangle$$

其中 c_0 和 c_1 都是非负实数, 且 $c_0^2 + c_1^2 = 1$.

对于 $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ 上厄密矩阵, 尤其是密度矩阵, 可以考虑在如下 16 个矩阵上展开.

$$\mathbb{1}^A \otimes \mathbb{1}^B, \quad \sigma_i^A \otimes \sigma_j^B, \quad \sigma_i^A \otimes \mathbb{1}^B, \quad \mathbb{1}^A \otimes \sigma_j^B, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

容易验证, 如果用这 16 个矩阵展开厄密矩阵, 那么展开系数一定是实数.

计算 (1) 式各个矩阵之间的对易关系:

$$[\sigma_x \otimes \sigma_x, \sigma_y \otimes \sigma_y] = 0$$

$$[\sigma_x \otimes \sigma_x, \sigma_x \otimes \sigma_y] = 2i\mathbb{1} \otimes \sigma_z$$

$$[\sigma_x \otimes \sigma_x, \sigma_y \otimes \sigma_z] = i\sigma_z \otimes (-i)\sigma_y - (-i)\sigma_z \otimes i\sigma_y = 0$$

定义两个矩阵 X 和 Y 的内积为 $(X, Y) := \text{Tr}(A^\dagger B)$, 如果内积为零, 那么它们正交. 验证 (1) 式中矩阵的正交性, 例如,

$$\text{Tr}[(\sigma_x \otimes \sigma_x)(\sigma_y \otimes \sigma_y)] = 0$$

$$\text{Tr}[(\sigma_x \otimes \sigma_x)(\mathbb{1} \otimes \sigma_y)] = 0$$

.....

$2 \otimes 2$ 系统的密度矩阵 ρ 可以表示为 (以下略去上标 A 和 B)

$$\rho = \frac{1}{4} \left[\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \sum_{m,n=1}^3 t_{mn} \sigma_m \otimes \sigma_n \right] \quad (2)$$

上式中 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, $t_{mn} \in \mathbb{R}$. 这些实参数的具体形式是

$$r_i = \text{Tr}[\rho(\sigma_i \otimes \mathbb{1})], \quad s_j = \text{Tr}[\rho(\mathbb{1} \otimes \sigma_j)], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$t_{mn} = \text{Tr}[\rho(\sigma_m \otimes \sigma_n)], \quad m, n = 1, 2, 3 \quad (4)$$

向量 \mathbf{r} 和 \mathbf{s} 是三维实空间中的向量, 且 $|\mathbf{r}| \leq 1$, $|\mathbf{s}| \leq 1$. 九个 t_{mn} 可以排成一个 3×3 的实数矩阵, 记作 $T = (t_{mn})$. 矩阵 T 矩阵元与 $\sigma_m \otimes \sigma_n$ 有关, 故被称为关联矩阵. 我们还可以把 16 个实数, $1, r_i, s_j, t_{mn}$, 排成一个 4×4 的矩阵, 记作 R_ρ , 其形式是

$$R_\rho = \begin{pmatrix} 1 & \vec{s} \\ r^\downarrow & T \end{pmatrix} \quad (5)$$

这里, \vec{s} 采用行向量的形式, r^\downarrow 采用列向量的形式, 而 T 则是一个 3×3 的矩阵.

考虑 ρ 的约化密度矩阵 ρ^A 和 ρ^B . 直接计算给出

$$\rho^A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

$$\rho^B = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma})$$

表明出现在 (2) 式中的 \mathbf{r} 和 \mathbf{s} 分别是关于子系统 A 和 B 约化密度矩阵的 Bloch 向量.

例如, 纯态 $|\Psi\rangle = \cos\alpha |00\rangle + \sin\alpha |11\rangle$ 的密度矩阵可以表示为

$$\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{4}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \sigma_z \otimes \mathbb{1} \cos 2\alpha + \mathbb{1} \otimes \sigma_z \cos 2\alpha + \sigma_x \otimes \sigma_x \sin 2\alpha - \sigma_y \otimes \sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

$$R_\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cos 2\alpha \\ 0 & \sin 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2\alpha & 0 \\ \cos 2\alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而对于直积形式的可分离态 $\rho^A \otimes \rho^B$, 它的 R 矩阵中的 T 矩阵是 $r^\downarrow \vec{s}$.

1.2 酉变换

两体量子系统的酉变换可以分为局部的和整体的. 以 $2 \otimes 2$ 为例讨论两体量子系统的酉变换.

局部酉变换

分别对每个子系统 A 和 B 进行酉变换 U^A 和 U^B , 更严格地写作 $U^A \otimes \mathbb{1}^B$ 和 $\mathbb{1}^A \otimes U^B$. 如果对 A 和 B 都进行局部酉变换, 那么酉变换矩阵是 $U^A \otimes U^B$.

$$\rho \longrightarrow (U^A \otimes U^B)\rho(U^A \otimes U^B)^\dagger$$

以前说过的 Schmidt 分解的形式就是来自局部酉变换的结果.

形如 $\sigma_i \otimes \mathbb{1}$ 或 $\mathbb{1} \otimes \sigma_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) 的生成元生成了局部酉变换, 例如

$$\exp\left\{-i\frac{\phi}{2}(\sigma_z \otimes \mathbb{1})\right\} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \cos\frac{\phi}{2} - i\sigma_z \otimes \mathbb{1} \sin\frac{\phi}{2} = e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z} \otimes \mathbb{1}$$

这实际上就是对第一个子系统的酉变换.

子系统之间的关联行为不会因为局部酉变换而改变.

整体酉变换

整体酉变换不能表示为局部酉变换的直积. 形如 $\sigma_i \otimes \sigma_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) 的生成元生成了整体酉变换. 例如, 以 $\sigma_z \otimes \sigma_z$ 作为变换的生成元, 有

$$U(\tau) = \exp\left\{-i\tau(\sigma_z \otimes \sigma_z)\right\} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \cos\tau - i\sigma_z \otimes \sigma_z \sin\tau$$

这个酉变换不能分解为 $U^A \otimes U^B$ 的形式, 它是整体的酉变换.

整体变换将改变子系统之间的关联行为, 而且, 在量子测量, 量子操控的理论和实验研究领域, 整体变换是必不可少的. 一个典型的例子是控制变换, 例如控制非变换, U_{CNOT} . 这里, CNOT 的意思是 control not, 即“控制非”操作, 矩阵形式是

$$U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

让 U_{CNOT} 作用于 $2 \otimes 2$ 系统的量子态, 其效果是: 如果第一个粒子处于 $|0\rangle$, 那么对第二个粒子不作任何操作, 单位算子 $\mathbb{1}$ 表示恒等变换; 如果第一个粒子处于 $|1\rangle$, 那么对第二个粒子进行 σ_x 操作. 注意到 σ_x 操作就是经典逻辑中的“非”运算, 故 U_{CNOT} 就是第一个粒子控制第二个粒子的控制非操作. 控制非操作不能表示为两个局部的酉变换的直积的形式, 它是面向两体量子态的整体的酉变换. 可以将控制非操作表示为

$$U_{\text{CNOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x \quad (7)$$

设系统 A 的初态是 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$, 系统 B 的初态是 $|\varphi\rangle = |0\rangle$. 对二者施加整体变化 U_{CNOT} , 有

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle &= (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \otimes |0\rangle \\ \longrightarrow U_{\text{CNOT}}[(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \otimes |0\rangle] \\ &= c_0|0\rangle|0\rangle + c_1|1\rangle|1\rangle \end{aligned}$$

得到的结果正是理想测量 (测量系统的力学量 σ_z) 所需要的.

定理 (整体酉变换的正则形式) 用 A 和 B 表示 $2 \otimes 2$ 量子系统的两个子系统. 任何一个整体酉变换可以表示为

$$U = (V^A \otimes V^B)U_{\text{can}}(W^A \otimes W^B) \quad (8)$$

其中 $V^{A(B)}$ 和 $W^{A(B)}$ 是作用于 $A(B)$ 的局部酉变换, 而 U_{can} 的形式是

$$U_{\text{can}} = \exp\left\{-i(\xi_x\sigma_x^A \otimes \sigma_x^B + \xi_y\sigma_y^A \otimes \sigma_y^B + \xi_z\sigma_z^A \otimes \sigma_z^B)\right\} \quad (9)$$

其中 ξ_x, ξ_y 和 ξ_z 均为实数, 下标 can 表示正则 (canonical) 形式. ■

该定理表明, 整体酉变换的核心部分是 U_{can} . 例如, 对于 U_{CONT} , 可以验证如下等式,

$$U_{\text{CNOT}} = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \exp \left\{ -i \frac{\pi}{4} (\sigma_x \otimes \sigma_x) \right\} \\ \times \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (10)$$

这就是说, 控制非操作的核心部分是两个粒子之间形如 $\sigma_x \otimes \sigma_x$ 的相互作用. 实际上, 利用形如 $\sigma_i \otimes \sigma_j$ ($i, j = x, y, z$) 的相互作用也可以构造出控制非操作, 与上式相比, 仅仅在局部的酉变换上有所不同. 控制非操作是整体酉变换的一种特殊形式, 它不但涉及形如 $\sigma_i \otimes \sigma_j$ 的相互作用, 而且对相互作用的强度和相互作用持续的时间也有要求, 简单地说, 这体现在 U_{can} 的展开形式中算子 $e^{-i\frac{\pi}{4}(\sigma_x \otimes \sigma_x)}$ 的指数上的因子 $\frac{\pi}{4}$.

1.3 简单的测量模型

设被测量子力学是一个双值量子系统, 记作 Q. 观测量是 σ_z^Q . 仪器也设为一个双值量子系统, 记作 M. 设系统 Q 和仪器 M 的整体哈密顿量是

$$H = -\hbar g \sigma_z^Q \otimes \sigma_y^M \quad (11)$$

这里略去了 Q 和 M 自身的哈密顿量. 其中 g 是耦合常数, 设 $g > 0$, 它的大小反映了相互作用的强弱. 在不致引起混淆的时候, 上标 Q 和 M 将被省去. 时间演化算子是 $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$,

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0 & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \tau & -\sin \tau \\ 0 & 0 & \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中 $\tau = gt$.

如果把 $U(\tau)$ 中左上角的 2×2 的子矩阵记作 U_0 , 把右下角的子矩阵记作 U_1 , 那么 $U(\tau)$ 可以写为 $U(\tau) = |0\rangle\langle 0| \otimes U_0 + |1\rangle\langle 1| \otimes U_1$. 这是一个控制酉操作: 当系统处于 $|0\rangle$ 时, 对仪器的操作是酉变换 U_0 ; 当系统处于 $|1\rangle$ 时, 对仪器的操作是酉变换 U_1 .

首先, 我们要说明将整体的酉演化设为 (12) 的意义. 为此, 计算系统的被测力学量 σ_z^Q 在 Heisenberg 图像中随时间的演化. 将 σ_z^Q 写作 $\sigma_z \otimes \mathbb{1}$. 在 Heisenberg 图像中,

$$(\sigma_z \otimes \mathbb{1})(t) = U^\dagger(t)(\sigma_z \otimes \mathbb{1})U(t) = \sigma_z \otimes \mathbb{1} = (\sigma_z \otimes \mathbb{1})(0)$$

上述结果缘于 $\sigma_z \otimes \mathbb{1}$ 与 H 对易. 因此, 系统的观测量 σ_z^Q 不随时间变化. 这是一件好事情, 因为我们在系统和仪器发生相互作用的过程中系统的观测量有所改变. 至于在 H 中出现的 σ_y^M , 作如此设定的原因只是为了在计算上的简洁——酉变换 $U(t)$ 是一个实数矩阵. 完全可以把 σ_y^M 替换成任意方向上的 Pauli 矩阵 σ_n^M , 不过这会影响到仪器的初态的选择, 在下面的讨论中将看到这一点.

现在再来计算仪器的一些典型的力学量随时间的变化. 将 σ_i^M 写作 $\mathbb{1} \otimes \sigma_i$, 在 Heisenberg 图像中,

$$(\mathbb{1} \otimes \sigma_x)(t) = U^\dagger(t)(\mathbb{1} \otimes \sigma_x)U(t) = (\mathbb{1} \otimes \sigma_x) \cos 2\tau - (\sigma_z \otimes \sigma_z) \sin 2\tau \quad (13)$$

$$(\mathbb{1} \otimes \sigma_y)(t) = U^\dagger(t)(\mathbb{1} \otimes \sigma_y)U(t) = \mathbb{1} \otimes \sigma_y \quad (14)$$

$$(\mathbb{1} \otimes \sigma_z)(t) = U^\dagger(t)(\mathbb{1} \otimes \sigma_z)U(t) = (\mathbb{1} \otimes \sigma_z) \cos 2\tau + (\sigma_z \otimes \sigma_x) \sin 2\tau \quad (15)$$

上面的三个结果可以帮助我们设定仪器的初态. 例如, 可以分以下三种情况讨论.

1. 设仪器的初态是 $|\varphi\rangle = |0\rangle$, 即 σ_z 的本征态. 系统的初态依旧是 $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$. 根据 (13)–(15) 式, 计算 t 时刻仪器力学量的期望值.

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_x \rangle(t) = \langle 0 | \sigma_x^M | 0 \rangle \cos 2\tau - \langle \psi | \sigma_z^Q | \psi \rangle \langle 0 | \sigma_z^M | 0 \rangle \sin 2\tau = -\langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle \sin 2\tau$$

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_y \rangle(t) = \langle 0 | \sigma_y^M | 0 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_z \rangle(t) = \langle 0 | \sigma_z^M | 0 \rangle \cos 2\tau + \langle \psi | \sigma_z^Q | \psi \rangle \langle 0 | \sigma_x^M | 0 \rangle \sin 2\tau = \cos 2\tau$$

如果在 t 时刻我们得到了仪器的力学量 σ_x^M 的期望值, 那么根据上面的第一个方程就可以知道系统的被测力学量 σ_z^S 在初态 $|\psi\rangle$ 中的期望值, 即

$$\langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle = -\frac{\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_x \rangle(t)}{\sin 2\tau} \quad (16)$$

而仪器的 σ_y^M 和 σ_z^M 在 t 时刻的期望值则不能提供关于 $\langle \psi | \sigma_z^Q | \psi \rangle$ 的任何信息.

2. 设仪器的初态是 $|\varphi\rangle = |x+\rangle$, 即 σ_x 的本征态, 类似的计算给出

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_x \rangle(t) = \cos 2\tau$$

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_y \rangle(t) = 0$$

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_z \rangle(t) = \langle \psi | \sigma_z^Q | \psi \rangle \sin 2\tau$$

只有仪器的 σ_z^M 是有用的,

$$\langle \psi | \sigma_z^Q | \psi \rangle = \frac{\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_z \rangle(t)}{\sin 2\tau} \quad (17)$$

3. 设仪器的初态是 $|\varphi\rangle = |y+\rangle$, 即 σ_y 的本征态, 对此, 我们有

$$\langle \mathbb{1} \otimes \sigma_x \rangle(t) = \langle \mathbb{1} \otimes \sigma_z \rangle(t) = 0, \quad \langle \mathbb{1} \otimes \sigma_y \rangle(t) = 1$$

从仪器身上看不到关于被测系统的任何信息.

通过以上讨论, 我们大体上知道了如何设定仪器的初态. 概括地说, 如果系统和仪器的相互作用具有 $\sigma_z \otimes \sigma_y$ 的形式, 那么我们需要将仪器的初态选择为与 σ_y^M 互补的力学量 (比如 σ_x^M 或 σ_z^M) 的本征向量. 然后, 相互作用之后的仪器的第三个互补力学量的期望值可以反映被测力学量在系统的初态中的期望值¹.

现在, 我们来考虑上述第 2 中情形. 设系统的初态是

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

这里, 为了计算简单, 设 c_0 和 c_1 为正实数. M 的初态设为 $|\varphi\rangle = |x+\rangle$. 二者共同的初态是 $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$, 演化的结果是

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau)\rangle &= U(\tau) |\Psi(0)\rangle \\ &= c_0|0\rangle \otimes |\varphi_0\rangle + c_1|1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$|\varphi_0\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |1\rangle \quad (19)$$

¹在有限的 n 维希尔伯特空间中, 两个力学量 A 和 B 的本征向量分别用 $|\alpha_i\rangle$ 和 $|\beta_j\rangle$ 表示, 如果对于任意的 i 和 j , 总是有 $|\langle \alpha_i | \beta_j \rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 那么这两个力学量就是互补力学量. 在 \mathbb{C}^n 中, 总是存在至少三个彼此互补的力学量.

$$|\varphi_1\rangle = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |1\rangle \quad (20)$$

注意, 除非 τ 取一些特殊值, $|\varphi_0\rangle$ 和 $|\varphi_1\rangle$ 是不正交的.

此前我们讨论过量子测量的 von Neumann 模型的时候, 有这样的要求: 对于理想测量, 在系统和仪器的前测量状态中, 仪器的量子态 $|\varphi_i\rangle$ 和系统观测量的本征态 $|\alpha_i\rangle$ 一一对应, 并且不同的 $|\varphi_i\rangle$ 彼此正交. 针对目前的情形, τ 需要取一些特殊值才能满足上述要求.

理想测量

选择 τ 使得 $\tau = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$. 以 $\tau = \frac{\pi}{4}$ 为例, 这时,

$$|\Psi(\frac{\pi}{4})\rangle = c_0 |0\rangle |0\rangle + c_1 |1\rangle |1\rangle$$

选择仪器的指针观测量为 σ_z^M , 根据仪器客观化假设, 在仪器上观测到对应于 σ_z^M 本征值 $+1$ 的现象的几率是 $|c_0|^2$, 观测到对应于 σ_z^M 本征值 -1 的现象的几率是 $|c_1|^2$. 这两个几率分别是 Born 规则给出的结果. 在测量仪器上观测到明确的现象, 这是仪器客观化假设的体现, 也意味着前测量状态 $|\Psi(\frac{\pi}{4})\rangle$ 演变为混合系综 $\{|c_i|^2, |i\rangle\langle i| \otimes |\varphi_i\rangle\langle \varphi_i|\}$, $i = 0, 1$.

非理想测量

当 τ 不等于 $\frac{\pi}{4}$ 的奇数倍的时候, $|\varphi_0\rangle$ 和 $|\varphi_1\rangle$ 不正交, 它们不能称为仪器的某个观测量的本征态. 虽然如此, 我们仍然可以选择仪器的指针观测量为 σ_z^M . 为此将 $|\Psi(\tau)\rangle$ 改写为

$$\begin{aligned} |\Psi(\tau)\rangle = & \left[c_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |0\rangle + c_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |1\rangle \right] \otimes |0\rangle \\ & + \left[c_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |0\rangle + c_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \tau\right) |1\rangle \right] \otimes |1\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

根据仪器客观化假设, 指针观测量 σ_z^M 表现出两个明确的现象, 对应于 σ_z^M 的本征值 $+1$ 和 -1 , 几率分别为

$$p(\sigma_z^M = +1) = \frac{1}{2}[1 + (c_0^2 - c_1^2) \sin 2\tau] \quad (22)$$

$$p(\sigma_z^M = -1) = \frac{1}{2}[1 - (c_0^2 - c_1^2) \sin 2\tau] \quad (23)$$

这两个几率不等于 Born 给出的几率 $|c_0|^2$ 和 $|c_1|^2$.

另一方面, 当 $\tau = gt$ 等于 $\frac{\pi}{4}$ 的偶数倍的时候, 即 $\tau = \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$, (17) 式的分母为零. 为了解释这个矛盾, 注意到当 τ 等于 $\frac{\pi}{4}$ 的偶数倍的时候, 例如当 $\tau = \frac{\pi}{2}$ 时, $|\Psi(t)\rangle$ 等于 $(c_0 |0\rangle - c_1 |1\rangle) \otimes |x-\rangle$, 这是一个直积态, (17) 式的分子等于 $\langle x-|\sigma_z|x-\rangle = 0$. 对这个 $\frac{0}{0}$ 的未定式的理解是, 此时系统和仪器之间没有任何关联, 我们不可能通过对仪器的观测来推知系统的任何信息.

在 t 时刻的整体量子态 $|\Psi(\tau)\rangle$ 中, 在 \mathcal{H}^M 上求迹, 有

$$\rho^Q(t) = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0 c_1 \cos 2\tau \\ c_0 c_1 \cos 2\tau & c_1^2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

当 τ 等于 $\frac{\pi}{4}$ 的奇数倍的时候, 系统的密度算子 $\rho^S(t)$ 是对角的, 非对角项的消失意味着相干性的消失. 可见, 理想测量的过程就是彻底破坏初态中的相干性, 使得测量过程结束后系统的态是一个具有经典意味的混合态, 即 $|c_0|^2 |0\rangle\langle 0| + |c_1|^2 |1\rangle\langle 1|$.

非理想测量过程涉及了广义量子测量, 这将在下一节中讨论, 然后再回过头来对这个最简单的 $2 \otimes 2$ 测量模型作进一步的分析.

广义量子测量

系统 Q 和仪器 M 的 Hilbert 空间分别记作 \mathcal{H}^Q 和 \mathcal{H}^M . 考虑有限维情形, \mathcal{H}^Q 的维数设为 N , \mathcal{H}^M 的维数应该至少为 N , 暂时设为 N . 设系统和仪器的初态均为纯态, 它们分别是 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^Q$ 和 $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}^M$, 二者整体的初态是直积态 $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \in \mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^M$. 在 t 时刻的整体的量子态 $|\Psi(t)\rangle$ 由整体酉变换 $U(t)$ 决定,

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(0)\rangle = U(t)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)$$

这里得到的 $|\Psi(t)\rangle$ 将被视作前测量状态. 接着, 设定仪器的指针观测量为 M , 它的本征值和本征态分别是 $|\mu\rangle$ 和 m_μ , 即 $M|\mu\rangle = m_\mu|\mu\rangle$. 我们把 \mathcal{H}^M 的基向量设为 $|\mu\rangle$. 在下面的计算过程中, 用希腊字母表示的量子态, 如 $|\nu\rangle, |\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 等, 都视作 M 的本征态, 同时也是 \mathcal{H}^M 的基向量.

根据仪器的客观化假设, 能够以一定的几率观测到与 m_μ 对应的现象. 从数学形式上说, 相当于用投影算子 $\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M$ 作用于 $|\Psi(t)\rangle$, 其中 $\Pi_\mu^M = |\mu\rangle\langle\mu|$.

$$\Psi(t) \longrightarrow (\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M)\Psi(t)(\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M) \quad (25)$$

现在需要计算上式右端的形式. 我们把酉变换 $U(t)$ 表示为

$$U(t) = \sum_{\alpha, \beta} u_{\alpha\beta} \otimes |\alpha\rangle\langle\beta|$$

还要注意 $u_{\alpha\beta}$ 是 \mathcal{H}^Q 上的矩阵, 而不是矩阵元. 由于 $U(t)$ 是酉矩阵, $u_{\alpha\beta}$ 须满足

$$\sum_{\beta} u_{\alpha\beta} u_{\alpha'\beta}^\dagger = \delta_{\alpha\alpha'} \mathbb{1}^Q, \quad \sum_{\alpha} u_{\alpha\beta}^\dagger u_{\alpha\beta} = \delta_{\beta\beta'} \mathbb{1}^Q \quad (26)$$

用密度矩阵的形式表示系统和仪器的初态. 令 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, $\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, $\Psi(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$, 则 t 时刻的整体量子态是

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| = U(t)\Psi(0)U^\dagger(t) = U(t)(\psi \otimes \varphi)U^\dagger(t) \\ &= \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} (u_{\alpha\beta}\psi u_{\alpha'\beta'}^\dagger) \otimes (|\alpha\rangle\langle\beta| \varphi |\beta'\rangle\langle\alpha'|) \end{aligned} \quad (27)$$

把上述形式代入 (25) 式的右端, 有

$$\begin{aligned} &(\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M)\Psi(t)(\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M) \\ &= \sum_{\alpha\beta\alpha'\beta'} (u_{\alpha\beta}\psi u_{\alpha'\beta'}^\dagger) \otimes (\Pi_\mu^M |\alpha\rangle\langle\beta| \varphi |\beta'\rangle\langle\alpha'| \Pi_\mu^M) \\ &= \sum_{\beta\beta'} (u_{\mu\beta}\psi u_{\mu\beta'}^\dagger) \otimes (\langle\beta|\varphi\rangle \langle\varphi|\beta'\rangle |\mu\rangle\langle\mu|) \\ &= \left[\left(\sum_{\beta} \langle\beta|\varphi\rangle u_{\mu\beta} \right) \psi \left(\sum_{\beta'} \langle\varphi|\beta'\rangle u_{\mu\beta'}^\dagger \right) \right] \otimes |\mu\rangle\langle\mu| \end{aligned} \quad (28)$$

令

$$K_\mu = \sum_{\beta} \langle\beta|\varphi\rangle u_{\mu\beta}, \quad K_\mu^\dagger = \sum_{\beta'} \langle\varphi|\beta'\rangle u_{\mu\beta'}^\dagger \quad (29)$$

算子 K_μ 因此被称为**操作算子**, 又叫 Kraus 算子, 稍后再作进一步解释. 将 (28) 写为

$$(\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M) \Psi(t) (\mathbb{1}^Q \otimes \Pi_\mu^M) = K_\mu \psi K_\mu^\dagger \otimes |\mu\rangle\langle\mu| \quad (30)$$

对上式的一些说明:

- 对仪器作投影测量 Π_μ^M 之后, 仪器的量子态一定是 $|\mu\rangle$, 与此对应的系统的未归一的量子态是 $K_\mu \psi K_\mu^\dagger$.
- 仪器的指针观测量 M 给出与本征值 m_i 对应的的现象, 这个事件出现的几率是

$$p_\mu = \text{Tr}(K_\mu \psi K_\mu^\dagger) = \text{Tr}(\psi K_\mu^\dagger K_\mu)$$

- 当仪器上体现测量结果 m_μ 的时候, 系统的量子态是 $\rho_\mu = \frac{1}{p_\mu} K_\mu \psi K_\mu^\dagger$.
- 从算子 $K_\mu = \sum_\beta \langle\beta|\varphi\rangle u_{\mu\beta}$ 的形式可以看出, 它与系统量子态无关. 决定 K_μ 的因素是: 系统和仪器的整体随时间的酉演化, 仪器的初态和仪器的指针观测量. 可以把 K_μ 表示为 $\langle\mu|U|\varphi\rangle$. 实际上,

$$\begin{aligned} \langle\mu|U|\varphi\rangle &= \text{Tr}_M [U(\mathbb{1} \otimes |\varphi\rangle\langle\mu|)] \\ &= \text{Tr}_M \left[\left(\sum_{\alpha,\beta} u_{\alpha\beta} \otimes |\alpha\rangle\langle\beta| \right) (\mathbb{1} \otimes |\varphi\rangle\langle\mu|) \right] \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \text{Tr}_M [u_{\alpha\beta} \otimes (|\alpha\rangle\langle\beta|\varphi\rangle\langle\mu|)] \\ &= \sum_{\beta} \langle\beta|\varphi\rangle u_{\mu\beta} = K_\mu \end{aligned}$$

图 1 描述了上面讨论的过程. 这里还没有指明被测力学量, 也没有给出酉变换 $U(t)$ 的具体形式. 从前测量状态 $\Psi(t)$ 到测量结果 m_μ 以及相应的系统的量子态 ρ_μ , 这个过程需要用到仪器的客观性假设.

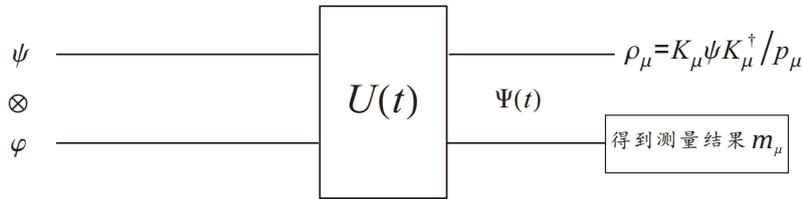


图 1: 广义量子测量

还应该注意, 在上面的叙述中, 系统的初态可以改为混合态而不会影响所有的结论, 但是仪器的初态应该保持为纯态².

2.1 操作算子和效果算子

对仪器作测量, 以及几率 p_μ 得到结果 m_μ , 这个操作导致了系统的量子态从初态 ψ 变化到 ρ_μ . 所以, 从系统的角度看, 它的量子态经历的变化是

$$\psi \longrightarrow K_\mu \psi K_\mu^\dagger \quad (\text{未归一})$$

²在更一般的讨论中, 仪器的初态可以是混合态, 给出的结论在形式上要复杂一些, 这里不谈了.

考虑所有的测量结果, 有

$$\psi \longrightarrow \rho^Q = \sum_{\mu} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} \quad (31)$$

以后我们要讨论开放量子系统的演化, 操作算子用来描述这种演化过程.

在仪器上得到结果 m_{μ} 的几率是 $p_{\mu} = \text{Tr}(\psi K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu})$. 令

$$E_{\mu} = K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu} \quad (32)$$

E_{μ} 称为**效果算子**, 又叫做**几率算子**. 这个名称的意义在于, 该算子与量子态的密度算子相乘, 再求迹, 给出几率.

显然, 效果算子是 (半) 正定的, 即 $E_{\mu} \geq 0$. 对于非选择的量子测量, 所有测量结果的几率的总和为 1, 这就说说, 对于任意的量子态 ρ , 应该有

$$\sum_{\mu} p_{\mu} = \sum_{\mu} \text{Tr}(\rho E_{\mu}) = 1$$

所以, 效果算子应该满足条件

$$\sum_{\mu} E_{\mu} = \mathbb{1}$$

投影算子既是操作算子, 又是效果算子

回顾 Born 规则. 在量子态 ρ 中测量观测量 $A = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$. 如果是理想测量, 那么得到结果 a_i 的几率是 $\text{Tr}(\rho \Pi_i)$, 其中 $\Pi_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$ 是投影算子, 而且 $\sum_i \Pi_i = \mathbb{1}$. 所以投影算子是效果算子的一种特殊形式. 另一方面, 与测量结果 a_i 对应的系统的未归一的量子态是 $\Pi_i \rho \Pi_i^{\dagger} = \Pi_i \rho \Pi_i$, 测量后系统处于混合系综 $\sum_i \Pi_i \rho \Pi_i$, 所以 Π_i 同时也是操作算子. 从 $\Pi_i^{\dagger} \Pi_i = \Pi_i$ 可以看出在理想测量中操作算子和效果算子都是投影算子.

定义 (广义测量) 广义量子测量用一组效果算子 $\{E_{\mu}\}$ 来描述. E_{μ} 是半正定的, 即 $E_{\mu} \geq 0$, 且 $\sum_{\mu} E_{\mu} = \mathbb{1}$, 这里 $\mathbb{1}$ 是系统的量子态 ρ 所在的 Hilbert 空间上的单位算子. 与效果算子 E_{μ} 对应的测量结果记作 m_{μ} , 得到该结果的几率等于 $\text{Tr}(E_{\mu} \rho)$. ■

在上述定义中, 对效果算子的要求只有两个: 一个是半正定性, 另一个是效果算子的和等于单位算子. 而对效果算子的个数并无限制. 效果算子的集合 $\{E_{\mu}\}$ 构成了单位算子 $\mathbb{1}$ 的正值算子分解, 故也被称为**正值算子测度** (positive operator valued measure), 简称 POVM.

选择不同的指针观测量, 有不同的操作算子和不同的效果算子

在 (29) 式中, 操作算子 K_{μ} 的具体形式依赖于整体的酉变换 $U(t)$, 仪器的初态以及仪器的指针观测量的选择. 选择不同的指针观测量相当于选择 \mathcal{H}^M 的不同的基向量.

在推导 K_{μ} 的过程中, \mathcal{H}^M 的基向量设为 $\{|\mu\rangle\}$. 现在设 \mathcal{H}^M 有另外一组基向量 $\{|\alpha\rangle\}$, 重复以上推导过程, 将得到另一组操作算子, 记作 J_{α} ,

$$J_{\alpha} = \langle\alpha| U |\varphi\rangle$$

注意到两组基向量之间的关系是某个酉矩阵 V , 矩阵元 $v_{\alpha\mu} = \langle\alpha|\mu\rangle$. 基向量 $|\mu\rangle$ 可以用 $|\alpha\rangle$ 表示, 即

$$|\mu\rangle = \sum_{\alpha} v_{\alpha\mu} |\alpha\rangle$$

代入 (29) 式,

$$K_\mu = \sum_\alpha v_{\alpha\mu}^* \langle \alpha | U | \varphi \rangle = \sum_\alpha v_{\alpha\mu}^* J_\alpha$$

这表明两组操作算子可以通过一个酉变换的矩阵元联系起来.

选择不同的指针观测量, 有不同的操作算子, 进而有不同的效果算子, 得到的观测结果的几率分布是不一样的. 实际上, 两种情形下的效果算子不相等, $K_\mu^\dagger K_\mu \neq J_\alpha^\dagger J_\alpha$,

虽然操作算子和效果算子都不相等, 但是在非选择测量之后, 系统的量子态是一样的, 系统的测量后的量子态不依赖于指针观测量的选择. 下面的计算表明了这一点.

$$\begin{aligned} \rho^\mathcal{Q}(t) &= \sum_\mu K_\mu \rho^\mathcal{Q}(0) K_\mu^\dagger \\ &= \sum_{\mu\alpha\alpha'} v_{\alpha\mu}^* v_{\alpha'\mu} J_\alpha \rho^\mathcal{Q}(0) J_{\alpha'}^\dagger \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \left(\sum_\mu v_{\alpha\mu}^* v_{\alpha'\mu} \right) J_\alpha \rho^\mathcal{Q}(0) J_{\alpha'}^\dagger \\ &= \sum_{\alpha\alpha'} \delta_{\alpha\alpha'} J_\alpha \rho^\mathcal{Q}(0) J_{\alpha'}^\dagger = \sum_\alpha J_\alpha \rho^\mathcal{Q}(0) J_\alpha^\dagger \end{aligned}$$

有件事需要注意, “非选择测量之后系统的量子态是一样的” 指的是测量后系统的混合系综的平均量子态是一样的, 但是两种情形下的系综是不同的.

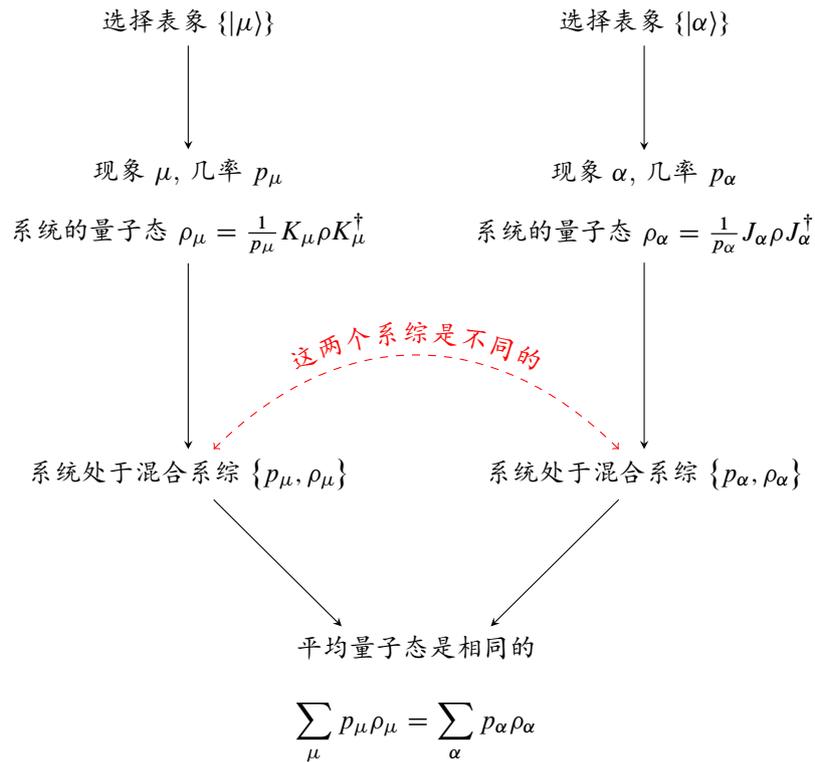


图 2: 选择不同的指针观测量, 非选择测量后系统的平均量子态是不变的.

不同的操作算子可以对应于相同的效果算子

以上我们通过操作算子 K_μ 给出了效果算子 E_μ , 反过来, 如果给定了效果算子 E_μ , 那么有无穷多个操作算子与之对应, 它们可以是 $K_\mu = E_\mu^{1/2}$, 也可以是 $K'_\mu = W_\mu E_\mu^{1/2}$, 这里的 W_μ 是任意的酉算子. 显然, $E_\mu = E_\mu^{1/2} E_\mu^{1/2} = E_\mu^{1/2} W_\mu^\dagger W_\mu E_\mu^{1/2}$. 两组不同的操作算子 $\{K_\mu\}$ 和 $\{K'_\mu\}$ 给出了不同的测量过程, 但是测量结果的几率分布是相同的, 均为 $\text{Tr}(E_\mu \psi)$.

在操作算子 K'_μ 中, 酉算子 W_μ 反映了测量过程对系统的被测力学量的扰动 (被称为 back action) 进一步的话题涉及非破坏测量 (Quantum non-demolition measurement), 在此不作讨论了.

2.2 $2 \otimes 2$ 量模型

现在用 1.3 节中简单模型体现前面的内容. 设两个自旋 1/2 粒子 (系统 Q 和仪器 M) 的初态是 $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |x+\rangle = (c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle) \otimes |x+\rangle$, 整体的随时间演化的酉变换是 $U(t) = e^{igt(\sigma_z \otimes \sigma_y)}$. 在 t 时刻整体的量子态 $|\Psi\rangle(t) = U(t)|\Psi(0)\rangle$, 这是前测量状态.

选择仪器的指针观测量为 σ_z^M , 也就是说, \mathcal{H}^M 的基向量是 σ_z 的本征向量, 记作 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, 对应的本征值分别是 +1 和 -1. 与仪器上的观测结果 +1 和 -1 对应的 Kraus 算子记作 K_0 和 K_1 .

根据 (29) 式, 可以得到 Kraus 算子 K_0 和 K_1 .

$$K_0 = \text{Tr}_M[U(\mathbb{1} \otimes |x+\rangle\langle 0|)] = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \text{Tr}_M[U(\mathbb{1} \otimes |x+\rangle\langle 1|)] = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$$

其中

$$d_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4} - gt\right), \quad d_1 = \sin\left(\frac{\pi}{4} - gt\right)$$

如果 gt 不等于 $\frac{\pi}{4}$ 的奇数倍, 那么 K_0 和 K_1 的秩为 2, 不可能是投影测量算子, 而是广义测量算子, 此时系统的量子态的演化是

$$\psi \longrightarrow \rho^Q = K_0 \psi K_0^\dagger + K_1 \psi K_1^\dagger = \begin{pmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \cos 2gt \\ c_0^* c_1 \cos 2gt & |c_1|^2 \end{pmatrix}$$

两个效果算子是 $E_0 = K_0^\dagger K_0$ 和 $M_1 = K_1^\dagger K_1$,

$$E_0 = \begin{pmatrix} d_0^2 & 0 \\ 0 & d_1^2 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_0^2 \end{pmatrix} \quad (33)$$

于是得到结果 ± 1 的几率分别是

$$p(+1) = \text{Tr}(E_0 \psi) = \frac{1}{2}[1 + (|c_0|^2 - |c_1|^2) \sin 2gt]$$

$$p(-1) = \text{Tr}(M_1 \psi) = \frac{1}{2}[1 - (|c_0|^2 - |c_1|^2) \sin 2gt]$$

当 gt 等于 $\frac{\pi}{4}$ 的偶数倍的时候, 两个 Kraus 算子均为单位阵, 系统 Q 的量子态没有变化, 因为系统和仪器处于平庸的直积态.

进一步分析效果算子

前面给出了效果算子 E_0 和 M_1 , 现在要作进一步的讨论. 我们将给出一个直观的、带有经典意味的理解方式. 但同时要注意的是, 用经典方式是不能解释量子现象的, 所以在关键的地方将出现经典情形与量子情形的对比.

先作一个简短的回顾. 系统的观测量是 σ_z , 本征向量是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, 仪器的初态设为 $|x+\rangle$. 在不会引起混淆的时候我们省略上标 Q 和 M . 系统和仪器的酉演化是,

$$|0\rangle \otimes |x+\rangle \longrightarrow |0\rangle \otimes |\varphi_0\rangle, \quad |1\rangle \otimes |x+\rangle \longrightarrow |1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \quad (34)$$

其中

$$|\varphi_0\rangle = d_0 |0\rangle + d_1 |1\rangle, \quad |\varphi_1\rangle = d_1 |0\rangle + d_0 |1\rangle$$

在这样的酉演化作用下, 系统和仪器的前测量状态是

$$|\Psi\rangle = c_0 |0\rangle \otimes |\varphi_0\rangle + c_1 |1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \quad (35)$$

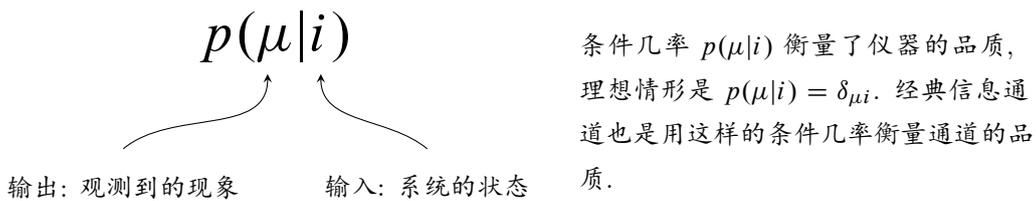
现在逐步给出具有经典意味的理解, 并指出其中的经典性体现在哪一步. 考察 (34), 可以把这个过程看作是将系统观测量 σ_z^Q 的本征态映射为仪器的状态, 即

$$|0^Q\rangle \longrightarrow |\varphi_0\rangle, \quad |1^Q\rangle \longrightarrow |\varphi_1\rangle \quad (36)$$

然后, 选择仪器的指针观测量为 $M = \sigma_z^M$. 当然, 指针观测量的选择不是随意的, 不是我们想选择什么就能选择什么, 下一小节将讨论环境对测量过程的影响, 在那里将看到, 仪器和环境的相互作用决定了哪个观测量可以作为指针观测量.

指针观测量体现了仪器客观化假设. 它的本征态 $|0^M\rangle$ 和 $|1^M\rangle$ 对应于宏观层面上的现象, 这些现象分别记作 $m_0 = +1$ 和 $m_1 = -1$. 从形式上说, 仪器的客观化假设相当于对仪器的观测量 σ_z^M 进行理想测量.

由于 $|\varphi_0\rangle$ 和 $|\varphi_1\rangle$ 都不是指针观测量 M 的本征态, 因此看到现象 m_0 的时候不能断定仪器的状态是 $|\varphi_0\rangle$ (进而断定系统对应的状态是 $|0\rangle$), 看到现象 m_1 的时候不能断定仪器的状态是 $|\varphi_1\rangle$ (进而断定系统对应的状态是 $|1\rangle$). 可以用条件几率 $p(\mu|i)$ 表示这里的不确定性,



条件几率 $p(\mu|i)$ 是可以计算的. 当输入态是系统的 $|0^Q\rangle$, 在测量仪器中先被映射为 $|\varphi_0\rangle$, 然后测量 σ_z^M , 有

$$p(0|0) = |\langle 0|\varphi_0\rangle|^2 = d_0^2, \quad p(1|0) = |\langle 1|\varphi_0\rangle|^2 = d_1^2$$

当输入态是系统的 $|1^Q\rangle$, 在测量仪器中先被映射为 $|\varphi_1\rangle$, 然后测量 σ_z^M , 有

$$p(0|1) = |\langle 0|\varphi_1\rangle|^2 = d_1^2, \quad p(1|1) = |\langle 1|\varphi_1\rangle|^2 = d_0^2$$

这四个条件几率构成一个双随机矩阵 P ,

$$P = \left(p(\mu|i) \right) = \begin{pmatrix} d_0^2 & d_1^2 \\ d_1^2 & d_0^2 \end{pmatrix}$$

矩阵 P 被称为几率传输矩阵.

更重要的是, 效果算子可以表示为

$$E_0 = \begin{pmatrix} |\langle 0|\varphi_0\rangle|^2 & 0 \\ 0 & |\langle 0|\varphi_1\rangle|^2 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} |\langle 1|\varphi_0\rangle|^2 & 0 \\ 0 & |\langle 1|\varphi_1\rangle|^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

在下一小节, 我们将给出该形式的详细讨论. 这里注意以下几点:

1. 通过映射关系 (36) 以及条件几率 $p(\mu|i)$ 确立了测量仪器的特性, 表现为几率传输矩阵 P 以及效果算子 E_0 和 E_1 . 这可以视为广义的校准过程.
2. 在校准仪器的时候, 我们使用的是系统观测量的本征态. 系统与仪器共同演化后的态是直积形式 $|i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$, 在这种情形下, 系统的量子态没有改变, 因此映射关系 $|i\rangle \rightarrow |\varphi_i\rangle$ 足以反映系统和仪器在观测过程中建立的联系, 而且还具有一定的经典意味: 系统的量子态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 彼此正交, 与仪器发生相互作用后不变化.
3. 条件几率 $p(\mu|i)$ 是针对几率而言的: 当条件 i 成立的前提下, 事件 μ 出现的概率. 这里的条件 i 和结果 μ 指的都是事件或现象, 是具体的, 是明确的. 当输入态是 $|i\rangle$ 的时候, 观测量 σ_z^Q 有确定的值, 满足“条件 i 成立”这个前提. 仪器的客观化假设能保证结果 μ 也是明确的事件.
4. 如果系统的初态是叠加态, 这是量子力学的典型特征, 那么酉演化的结果不是简单的直积态, 而是纠缠态,

$$\sum_i c_i |i\rangle \otimes |\varphi\rangle \rightarrow \sum_i c_i |i\rangle |\varphi_i\rangle$$

不能将映射简单地表示为 $|i\rangle \rightarrow |\varphi_i\rangle$, 也不能想当然地利用线性性, 写出

~~$$c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle \rightarrow c_0 |\varphi_0\rangle + c_1 |\varphi_1\rangle$$~~

映射关系 $|i\rangle \rightarrow |\varphi_i\rangle$ 只是校准仪器的时候一个形象的说法, 不是真实的物理过程, 不能随意使用线性条件. 同样地, 当系统的初态是叠加态 $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ 的时候, 对于条件几率 $p(\mu|i)$, 我们也不能说这样的话:

~~$$\text{以几率 } |c_i|^2 \text{ 向仪器输入 } |i\rangle, \text{ 条件 } i \text{ 出现的几率是 } |c_i|^2. \quad (38)$$~~

这个说法的错误之处在于, 将叠加态 $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ 看成了混合系综 $\{|c_i|^2, |i\rangle|i\rangle\}$. 有意思的, 同时也是容易引起误解的是, 叠加态 $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ 和混合系综 $\{|c_i|^2, |i\rangle|i\rangle\}$ 给出了相同的测量结果的几率分布. 也就是说, 对于这两个形式的量子态, 无法通过 σ_z^Q 的测量加以区分. 这是我们以前介绍混合态的时候讨论过的事情. 也正是因为这一点, 在看待叠加态 $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ 的时候, 错误的说法“粒子以一定的几率 $|c_i|^2$ 处于量子态 $|i\rangle$ ”会见诸很多场合.

将上面的讨论作一些具体的处理.

经典情形 经典情形下, 双值系统的状态只有两个, 记作 0^Q 和 1^Q , 不会有二者的叠加形式, 只能以分别以几率 p_0 和 p_1 出现. 输入到测量仪器的系统的状态可以用一个几率向量 \mathbf{p}^Q 表示

$$\mathbf{p}^Q = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

测量仪器有两个输出, 记作 0^M 和 1^M , 在两个输出端观测到现象的几率分别记作 q_0 和 q_1 , 令 \mathbf{q}^M

$$\mathbf{q}^M = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

输入端的几率向量和输出端的几率向量之间的联系是传输矩阵 P ,

$$\mathbf{q}^M = P \mathbf{p}^Q = \begin{pmatrix} d_0^2 p_0 + d_1^2 p_1 \\ d_1^2 p_0 + d_0^2 p_1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

量子情形

上述经典情形的结果可以有量子情形的对应. 假设系统处于混合系综

$$\mathcal{E}^Q = \{p_i, |i\rangle\langle i|\}, \quad i = 0, 1, \quad p_0 + p_1 = 1$$

这相当于以几率 p_i 向仪器输入 $|i\rangle$. 该系综的平均量子态是

$$\rho^Q = p_0 |0\rangle\langle 0| + p_1 |1\rangle\langle 1|$$

利用前面得到的效果算子 (33), 在仪器上观测到现象 m_μ 的几率是 (仍然用 q_μ 表示)

$$\begin{aligned} q_0 &= \text{Tr}(E_0 \rho^Q) = d_0^2 p_0 + d_1^2 p_1 \\ q_1 &= \text{Tr}(M_1 \rho^Q) = d_1^2 p_0 + d_0^2 p_1 \end{aligned} \quad (40)$$

与经典情形下的结果 (39) 相同.

如果系统处于叠加态 $|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$, 那么根据前面的讨论, 不能说仪器的输入态处于 $|0\rangle$ 的几率是 $|c_0|^2$, 处于 $|1\rangle$ 的可能性是 $|c_1|^2$. 直接使用效果 E_0 和 M_1 , 给出观测结果 m_μ 出现的几率 $\text{Tr}(\psi E_\mu)$.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\psi E_0) &= d_0^2 |c_0|^2 + d_1^2 |c_1|^2 \\ \text{Tr}(\psi E_1) &= d_1^2 |c_0|^2 + d_0^2 |c_1|^2 \end{aligned} \quad (41)$$

如果令 $p_0 = |c_0|^2$, $p_1 = |c_1|^2$, 那么该结果等同于 (40). 这就是说, 目前的测量方式无法区分叠加形式的纯态 $c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$ 与混合系综 $\{|c_i|^2, |i\rangle\langle i|\}$.

2.3 广义量子测量, 更具体的形式

系统 Q , 仪器 M . 初态分别是 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$. 系统的两个力学量记作 A 和 B , 仪器的两个力学量记作 X 和 Z .

表 1: 仪器采用离散变量时的量子测量

	系统	仪器
力学量	A	X, Z
本征值和本征向量	$(a_i, \alpha_i\rangle)$	$(x_\nu, \xi_\nu\rangle), (z_\mu, \zeta_\mu\rangle)$
初态	$ \psi\rangle$	$ \varphi\rangle$
相互作用	$H = gA \otimes X$	

仪器的观测量 X 参与了系统和仪器的相互作用, 时间演化算子是 (令 $\hbar = 1$)

$$U = \exp \{-i\tau A \otimes X\}, \quad \tau = gt \quad (42)$$

我们可以把 U 算子表示为控制酉变换的形式,

$$U = \exp \left\{ -i\tau \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle \alpha_i| \otimes X \right\}$$

$$= \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + (-i\tau) \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes X + \frac{(-i\tau)^2}{2!} \sum_i a_i^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes X^2 + \dots$$

接下来把系统的单位矩阵表示为 $\mathbb{1} = \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$

$$\begin{aligned} &= |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes \left(\mathbb{1} + (-i\tau a_1)X + \frac{(-i\tau a_1)^2}{2!} X^2 + \dots \right) \\ &\quad + |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \otimes \left(\mathbb{1} + (-i\tau a_2)X + \frac{(-i\tau a_2)^2}{2!} X^2 + \dots \right) \\ &\quad + \dots \\ &= |\alpha_1\rangle\langle\alpha_1| \otimes e^{-i\tau a_1 X} + |\alpha_2\rangle\langle\alpha_2| \otimes e^{-i\tau a_2 X} + \dots \end{aligned}$$

令

$$U_i = e^{-i\tau a_i X}$$

整体的酉变换 U 可以表示为

$$U = \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes U_i \quad (43)$$

这是一个控制酉变换. 在酉变换 U 的作用下, Q 和 M 达到纠缠态 $|\Psi\rangle$, 即前测量状态,

$$|\Psi\rangle = U(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)$$

设 $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle$, 利用 (43), 将 $|\Psi\rangle$ 表示为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \left(\sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \otimes U_i \right) \left(\sum_j c_j |\alpha_j\rangle \otimes |\varphi\rangle \right) \\ &= \sum_i c_i |\alpha_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle \end{aligned}$$

其中 $|\varphi_i\rangle = U_i |\varphi\rangle$. 如果 $|\varphi_i\rangle$ 彼此正交, 那么就是理想测量, 否则是不理想的.

仪器的观测量 Z 将被当做指针观测量, 描述仪器的 Hilbert 空间的基向量选择为 Z 的本征向量 $|\zeta_\mu\rangle$, Kraus 算子可以表示为

$$\begin{aligned} K_\mu &= \langle\zeta_\mu|U|\varphi\rangle \\ &= \sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \langle\zeta_\mu|U_i|\varphi\rangle \\ &= \sum_i \langle\zeta_\mu|\varphi_i\rangle |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \end{aligned}$$

可以看出, 在 A 表象中, K_μ 是对角的. 效果算子

$$E_\mu = K_\mu^\dagger K_\mu = \sum_i |\langle\zeta_\mu|\varphi_i\rangle|^2 |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$$

在 A 表象中, 效果算子 E_μ 也是对角的.

操作算子和效果算子在观测量表象中具有对角形式, 这是在酉演化具有形式 (42) 的时候才有的结论, 一般情形下不一定如此. 具体的例子见 (37).

2.4 广义测量一个应用, 非正交量子态的区分

作为广义测量的一个应用, 我们来讨论非正交量子态的区分. 设想这样的制备过程: 以几率 p_1 制备一个量子态 $|\psi_1\rangle$, 以几率 p_2 制备量子态 $|\psi_2\rangle$, 且 $p_1 + p_2 = 1$. 对于这样的制备结果, 需要用混合系综 $\{p_i, \psi_i\}$ ($i = 1, 2$) 来描述. 如果 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 不是正交的, 那么即便我们知道 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的具体形式, 也不能严格区分这两个量子态³. 换句话说, 我们只能以一定的几率成功地区分它们, 但也有失败的可能.

以自旋 $1/2$ 粒子的量子态为例继续讨论. 不失一般性地, 设

$$|\psi_1\rangle = |z+\rangle = |0\rangle, \quad |\psi_2\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (44)$$

相应的几率依旧记作 p_1 和 p_2 . 如果 $\theta = \pi$, 则 $|\psi_2\rangle = |1\rangle$, 这两个量子态是正交的, 只要让粒子穿过 SG 装置 $SG(z)$, 观察出射粒子的偏转方向即可断定粒子的状态. 而现在 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 并不正交, 如果用 $SG(z)$ 装置来检测粒子的状态, 那么观察到向 $+z$ 方向偏转的出射粒子并不表明粒子原先处于 $|\psi_1\rangle$ 态, 因为处于 $|\psi_2\rangle$ 的粒子会有几率 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 偏向 $+z$ 方向. 同样地, 如果用 $SG(\theta)$ 装置 (即非均匀磁场的方向在 xz 平面内且与 z 轴的夹角是 θ , 将该方向记作 \mathbf{n}) 进行检测, 那么根据“偏向 $+\mathbf{n}$ 方向”这一观测结果不能断定入射粒子处于 $|\psi_2\rangle$. 非正交量子态之间的重叠 $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$ 阻碍了我们对它们进行严格区分.

虽然如此, 仍有一定的几率可以成功地区分它们. 当我们在 $SG(z)$ 实验中看到偏向 $-z$ 方向的粒子的时候, 可以断定入射粒子处于 $|\psi_2\rangle$. 这是因为, 如果入射粒子处于 $|\psi_1\rangle$, 那么经过 $SG(z)$ 之后只能偏向 $+z$ 方向而不会看到偏向 $-z$ 方向的粒子. 同样地, 当我们在 $SG(\theta)$ 实验中看到偏向 $-\mathbf{n}$ 的粒子, 那么将断定入射粒子处于 $|\psi_1\rangle$. 根据这样的考虑, 定义下面三个效果算子

$$M_1 = c|\psi_2^\perp\rangle\langle\psi_2^\perp|, \quad M_2 = c|\psi_1^\perp\rangle\langle\psi_1^\perp|, \quad E_3 = \mathbb{1} - M_1 - M_2 \quad (45)$$

这里 $c > 0$ 是一个尚未确定的因子, $|\psi_1^\perp\rangle$ 和 $|\psi_2^\perp\rangle$ 分别是与 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 正交的量子态.

$$|\psi_1^\perp\rangle = |1\rangle, \quad |\psi_2^\perp\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

引入 c 的目的是为了保持效果算子的正定性, 虽然 M_1 和 M_2 是正定的, 但是还需要检验 E_3 的正定性. E_3 的本征值是 $1 - c \pm c \cos\frac{\theta}{2}$, 因此考虑到 E_3 的正定性, 对 c 的限制是

$$0 < c < \frac{1}{1 + \cos\frac{\theta}{2}}$$

在这个条件下, 三个效果算子都是正定的. 接着考虑对混合系综 $\{p_i, \psi_i\}$ ($i = 1, 2$) 的广义测量, 这个系综的平均量子态是 $\rho = p_1\psi_1 + p_2\psi_2$. 与效果算子 E_i 对应的测量结果记作 m_i , 这些测量结果将体现在测量仪器上. 当得到结果 m_1 和 m_2 的时候, 可以明确地知道粒子的状态分别是 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$. 当得到 m_3 的时候, 我们不能确定粒子的状态, 结果 m_3 出现的几率就是区分失败的几率, 记作 p^{failure} ,

$$p^{\text{failure}} = \text{Tr}(E_3\rho) = 1 - c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

我们自然希望失败的几率越小越好, 而 c 的上限是 $\frac{1}{1 + \cos\frac{\theta}{2}}$, 将这个值代入上式, 得到区分失败的最小的几率

$$p_{\text{min}}^{\text{failure}} = \cos\frac{\theta}{2}$$

这个结果正是两个非正交量子态之间的重叠, $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$.

³如果能为我们提供无穷多的处于相同状态的量子系统, 那么可以严格确定系统的量子态. 但这是不切实际的, 而且, 量子态是不能克隆的.

开放量子系统的演化

对于孤立的量子系统, 随时间的演化是由系统的哈密顿量支配的酉演化, 可以用 Schrödinger 方程描述. 如果我们所关注的量子系统 (记作 Q) 与别的量子系统或者环境有相互作用, 那么系统 Q 的演化过程就是一个开放的演化过程, 不能用 Schrödinger 方程描述. 开放量子系统的演化是一个专门的话题, 这里不能详细讨论, 只是在两体量子系统的框架内给予适当说明.

我们通过以下过程描述开放量子系统的演化:

1. 系统 Q 的初态设为 $\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$, 另一个系统或环境记作 M, 其初态设为 $\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. 一开始的时候, 两者没有关联, 两体系统的初态是直积态 $|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$.
2. 从时刻 $t = 0$ 开始, Q 和 M 之间有了相互作用, 二者在整体的哈密顿量的支配下随时间演化, 时间演化算子是酉算子 $U(t)$. 在 t 时刻, 两体量子态是 $|\Psi(t)\rangle = U(t)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)$, 密度算子是 $\Psi(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$.
3. 在 t 时刻, 抛开 M, 只关注 Q. 从数学形式上说, 就是对 $\Psi(t)$ 求关于 M 的部分迹, 得到 t 时刻系统 Q 的量子态 $\rho^Q(t) = \text{Tr}_M \Psi(t)$.

上述过程如图 3 所示.

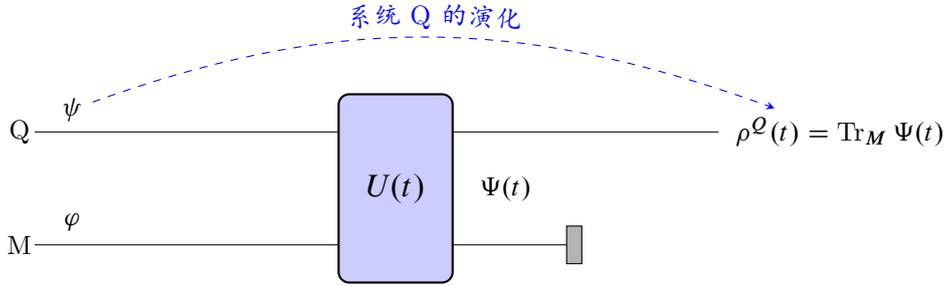


图 3: 开放量子系统的演化

实际上, 在第 2 节中我们已经得到了 $\rho^Q(t)$, 即 (31) 式:

$$\psi \longrightarrow \rho^Q = \sum_{\mu} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger}$$

其中 K_{μ} 是 Kraus 算子, $K_{\mu} = \langle\mu|U|\varphi\rangle$. 现在对这个过程再作说明.

在推导 (31) 式的时候, 我们将 Hilbert 空间 \mathcal{H}^M 的基向量选择为指针观测量 M 的基向量 $|\mu\rangle$. 现在要计算 $\text{Tr}_M \Psi$, 仍然将 \mathcal{H}^M 的基向量设为 $|\mu\rangle$, 有

$$\text{Tr}_M \Psi = \sum_{\mu} \langle\mu|\Psi|\mu\rangle = \sum_{\mu} \text{Tr}_M [\Psi(\mathbb{1} \otimes \Pi_{\mu})]$$

其中 $\Pi_{\mu} = |\mu\rangle\langle\mu|$. 再注意到

$$\text{Tr}_M [\Psi(\mathbb{1} \otimes \Pi_{\mu})] = \text{Tr}_M [(\mathbb{1} \otimes \Pi_{\mu})\Psi(\mathbb{1} \otimes \Pi_{\mu})] \quad (46)$$

$$\stackrel{\text{cf. (30)}}{=} \text{Tr}_M [K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} \otimes |\mu\rangle\langle\mu|] = K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} \quad (47)$$

所以

$$\rho^Q = \text{Tr}_M \Psi = \sum_{\mu} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger}$$

关于 (46) 式的说明

(46) 式似乎用到了这样的关系:

$$\text{Tr}_M(XY) = \text{Tr}_M(YX), \quad \text{其中 } X \text{ 和 } Y \text{ 是整体空间 } \mathcal{H} = \mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^M \text{ 上的线性算子}$$

一般情况下部分迹的运算没有这样的性质. (46) 式之所以成立, 是因为其中一个算子是局部算子, 即 $\mathbb{1} \otimes \Pi_\mu$. 实际上, 我们有

$$\begin{aligned} \text{Tr}_M[X(\mathbb{1} \otimes B)] &= \sum_{\mu, \nu} \text{Tr}_M[(x_{\mu\nu} \otimes |\mu\rangle\langle\nu|)(\mathbb{1} \otimes B)] \quad (\text{其中 } x_{\mu\nu} \text{ 是 } \mathcal{H}^Q \text{ 上的算子}) \\ &= \sum_{\mu, \nu} x_{\mu\nu} \text{Tr}(|\mu\rangle\langle\nu| B) \\ &= \sum_{\mu, \nu} x_{\mu\nu} \langle\nu|B|\mu\rangle \end{aligned}$$

以及类似的过程给出

$$\text{Tr}_M[(\mathbb{1} \otimes B)X] = \sum_{\mu, \nu} x_{\mu\nu} \langle\nu|B|\mu\rangle$$

所以

$$\text{Tr}_M[X(\mathbb{1} \otimes B)] = \text{Tr}_M[(\mathbb{1} \otimes B)X]$$

我们还知道, Tr_M 的运算不依赖于 \mathcal{H}^M 的基向量的选择. 选择 \mathcal{H}^M 不同的基向量, 即选择不同的表象, 然后求部分迹 Tr_M , 这会导致系统 Q 处于不同的混合系统, 但是它们的平均量子态是一样的, 见图 2.

综上所述, 系统 Q 的开放演化过程可以表示为

$$\psi \longrightarrow \rho^Q = \sum_{\mu} K_{\mu} \psi K_{\mu}^{\dagger} \quad (48)$$

其中 Kraus 算子 K_{μ} 满足条件

$$\sum_{\mu} K_{\mu}^{\dagger} K_{\mu} \leq \mathbb{1} \quad (49)$$

当上式取等号的时候, 演化前后几率守恒, 是保迹的演化过程. 如果取不等号, 那么演化后几率有损失, 例如选择性的量子测量. 算子 K_{μ} 依赖于系统 Q 和系统 M 之间的相互作用以及 M 的初态, 决定了 Q 的量子态的演化, 故又名操作算子.

关于系统量子态的演化以及 Kraus 算子, 有以下说明.

1. 在推导 (49) 式的过程中, 系统和仪器的初态必须是直积态, 否则不能得到 Kraus 算子. 因此, 在此强调指出, 这里及以后谈到的系统和仪器的初态或者系统与环境的初态一律设为直积态⁴.

2. 上面的推导过程可以不作任何修改而适用于系统的初态是混合态的情形.

3. 系统 M 的初态也可以是混合态, 在这种情形下, 操作算子的个数会增多. 在此不作讨论.

⁴近年的研究涉及了系统和仪器的初态并非直积态的情况下系统的演化过程, 这些内容超出了课程范围, 故不作讨论.

4. 式 (49) 描述了较为一般的情形下量子态的演化. 有两个极端情形值得一提. 一是酉演化, 此时所有的 K_μ 等于某个作用于系统的酉变换 $U^Q(t)$, 于是得到我们熟悉的

$$\rho^Q(t) = U^Q(t)\rho^Q(0)(U^Q(t))^\dagger$$

另一个是投影测量, 此时 Kraus 算子就是投影算子 $\Pi_i = |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$, 这里设 $|\alpha_i\rangle$ 是系统的某个力学量 A 的本征向量. 于是, 测量后系统的状态是

$$\rho^Q(t) = \sum_i \Pi_i \rho^Q(0) \Pi_i = \sum_\mu \langle\alpha_i|\rho^Q(0)|\alpha_i\rangle |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| \quad (50)$$

这是对测量后对结果不作任何选择的情况下系统的状态. 可以看出, 在基向量 $|\alpha_i\rangle$ 上 $\rho^Q(t)$ 具有对角形式, 非对角的相干项全都消失为零.

4

Zurek 的测量模型

在讨论两体系统的整体酉变换的时候, 我们计算了 $2 \otimes 2$ 两体系统的量子态在酉变换 $e^{i\tau(\sigma_z \otimes \sigma_y)}$ 的作用下的结果, 大致过程是这样的:

系统和仪器的初态分别是 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$

两体系统的变换结果是 $|\Psi(\tau)\rangle = e^{i\tau(\sigma_z \otimes \sigma_y)} (|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle)$

$$\text{系统的量子态是 } \rho^Q(\tau) = \text{Tr}_M |\Psi(\tau)\rangle\langle\Psi(\tau)| = \begin{pmatrix} c_0^2 & c_0 c_1 \cos 2\tau \\ c_0 c_1 \cos 2\tau & c_1^2 \end{pmatrix}$$

这是一个双值系统 (系统 Q) 与另一个双值系统 (被视作仪器) 相互作用后系统的状态. 我们还说过, 系统的状态从 $|\psi\rangle$ 到 $\rho^Q(\tau)$ 的演化过程属于开放量子系统的演化. 开放量子系统的演化关注的是系统与环境相互作用后系统的状态. 如果用一个简单的双值系统来模拟环境, 那么这只是一个过于粗糙的模型. 下面考虑稍微复杂, 但还是可以计算的情况.

设想环境是由 N 个两能级系统构成的.

N 个两能级系统 \sim 环境

设第 k 个两能级系统的 Hilbert 空间的基向量是 $\{|0_k\rangle, |1_k\rangle\}$, 而且, N 个两能级系统之间没有相互作用.

假设系统 Q 和第 k 个两能级系统之间的相互作用是

$$H^{QE_k} = -g_k \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_k} \quad (51)$$

系统 Q 和环境 E 的整体的 Hamilton 量是

$$H^{QE} = \sum_{k=1}^N H^{QE_k}. \quad (52)$$

它的具体形式是

$$\begin{aligned} H^{QE} = & -g_1 \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{M_1} \otimes \mathbb{1}^{M_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \\ & -g_2 \sigma_z^Q \otimes \mathbb{1}^{M_1} \otimes \sigma_z^{M_2} \otimes \mathbb{1}^{E_3} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \end{aligned}$$

$$-g_3 \sigma_z^Q \otimes \mathbb{1}^{M_1} \otimes \mathbb{1}^{M_2} \otimes \sigma_z^{E_3} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} + \dots \quad (53)$$

注意到上式右端中的各项都是彼此对易的.

系统和环境随时间的演化是 (以下令 $\hbar = 1$)

$$U^{QE}(t) = \exp \{ -iH^{QE}t \}$$

为了得到 $U^{QE}(t)$ 的具体形式, 可以对 (53) 式的右端逐项计算. 例如, 第一项给出如下酉变换,

$$\begin{aligned} U_1(t) &= \exp \{ i g_1 t (\sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{M_1}) \} \otimes \mathbb{1}^{M_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \\ &= \mathbb{1}^Q \otimes \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{1}^{E_k} \cos g_1 t + i \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{M_1} \otimes \mathbb{1}^{M_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \sin g_1 t \end{aligned}$$

第二项给出的酉变换是

$$U_2(t) = \mathbb{1}^Q \otimes \bigotimes_{k=1}^N \mathbb{1}^{E_k} \cos g_2 t + i \sigma_z^Q \otimes \mathbb{1}^{M_1} \otimes \sigma_z^{M_2} \otimes \mathbb{1}^{E_3} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}^{E_N} \sin g_2 t$$

其它各项给出类似的形式, $U_k(t)$. 它们都是控制酉变换: 当系统的量子态是 $|0\rangle$ 时, 对 E_k 进行酉变换 $\begin{pmatrix} e^{i g_k t} & 0 \\ 0 & e^{-i g_k t} \end{pmatrix}$; 当系统的量子态是 $|1\rangle$ 时, 对 E_k 进行酉变换 $\begin{pmatrix} e^{-i g_k t} & 0 \\ 0 & e^{i g_k t} \end{pmatrix}$. 根据这个规则, 容易计算系统和环境作为一个整体的演化结果.

系统和环境的整体初态是

$$|\Psi^{QE}(0)\rangle = |\psi^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}(0)\rangle$$

其中 $|\psi^Q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|\mathcal{E}(0)\rangle$ 是环境的初态, 设为

$$|\mathcal{E}(0)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N (\alpha_k |0_k\rangle + \beta_k |1_k\rangle) \quad (54)$$

这是一个“大”的纯的直积态.

计算 Q 与 E_k 的相互作用以及酉变换对初态的影响, 这相当于考虑两体系统的演化.

$$\begin{aligned} & U_k(t) \left[(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (\alpha_k |0_k\rangle + \beta_k |1_k\rangle) \right] \\ &= \exp \{ i g_k t \sigma_z^Q \otimes \sigma_z^{E_k} \} \left[a \alpha_k |0\rangle \otimes |0_k\rangle + a \beta_k |0\rangle \otimes |1_k\rangle \right. \\ & \quad \left. + b \alpha_k |1\rangle \otimes |0_k\rangle + b \beta_k |1\rangle \otimes |1_k\rangle \right] \\ &= a |0\rangle \otimes \left[\alpha_k e^{i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{-i g_k t} |1_k\rangle \right] \\ & \quad + b |1\rangle \otimes \left[\alpha_k e^{-i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{i g_k t} |1_k\rangle \right] \end{aligned}$$

考虑了 Q 与所有的 E_k 之间的相互作用和时间演化之后, 系统和环境的整体量子态是

$$\begin{aligned} & |\Psi^{QE}(t)\rangle \\ &= a |0\rangle \otimes \bigotimes_{k=1}^N \left[\alpha_k e^{i g_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{-i g_k t} |1_k\rangle \right] \end{aligned}$$

$$+ b |1\rangle \otimes \bigotimes_{k=1}^N \left[\alpha_k e^{-ig_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{ig_k t} |1_k\rangle \right]$$

定义

$$|\mathcal{E}_0(t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left[\alpha_k e^{ig_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{-ig_k t} |1_k\rangle \right], \quad (55)$$

$$|\mathcal{E}_1(t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left[\alpha_k e^{-ig_k t} |0_k\rangle + \beta_k e^{ig_k t} |1_k\rangle \right]. \quad (56)$$

将 $|\Psi^{QE}(t)\rangle$ 重新改写为

$$|\Psi^{QE}(t)\rangle = a |0^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + b |1^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle. \quad (57)$$

现在, 通过求迹把环境 E 去除, 得到 Q 的状态. 先定义一个函数 $z(t)$,

$$z(t) = \prod_{k=1}^N \left[\cos 2g_k t + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin 2g_k t \right]$$

它实际上就是 $|\mathcal{E}_0(t)\rangle$ 和 $|\mathcal{E}_1(t)\rangle$ 之间的内积,

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{E}_1(t) | \mathcal{E}_0(t) \rangle \\ &= \prod_{k=1}^N \left[|\alpha_k|^2 e^{i2g_k t} + |\beta_k|^2 e^{-i2g_k t} \right] \\ &= \prod_{k=1}^N \left[\cos 2g_k t + i(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2) \sin 2g_k t \right] \\ &= z(t). \end{aligned}$$

系统和环境相互作用后系统的量子态记作 ρ^Q , 具体形式是

$$\rho^Q(t) = \text{Tr}_E \left| \Psi^{QE}(t) \right\rangle \left\langle \Psi^{QE}(t) \right| \quad (58)$$

$$= |a|^2 |0\rangle\langle 0| + z(t) ab^* |0\rangle\langle 1| + z^*(t) a^* b |1\rangle\langle 0| + |b|^2 |1\rangle\langle 1|$$

$$= \begin{pmatrix} |a|^2 & z(t) ab^* \\ z^*(t) a^* b & |b|^2 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

非对角项随时间变化. 分析 $z(t)$ 的性质.

- 初始时刻 $t = 0$, $z(0) = 1$.
- $|z(t)|^2 = \prod_{k=1}^N \left[\cos^2 2g_k t + (|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2)^2 \sin^2 2g_k t \right] \leq 1$.

容易看到, 随着 N 的增大, $|z(t)|$ 更快地衰减到 0. 虽然 $|z(t)|$ 在本质上是一个周期函数, 但是, 如果 g_k 的取值是随机的, 那么 $|z(t)|$ 的周期将会很长, 重新回到初值 1 是一件遥遥无期的事. 见图 4.

在 (59) 式所示的 ρ^Q 中, 非对角项的模在短时间内衰减到零.

$$\rho^Q \longrightarrow |a|^2 |0\rangle\langle 0| + |b|^2 |1\rangle\langle 1|.$$

这时, 系统的状态变成了对角形式的混合态. 这是环境对系统的量子态的影响所产生的结果. Zurek 曾用这个模型讨论了环境导致的超选择规则⁵.

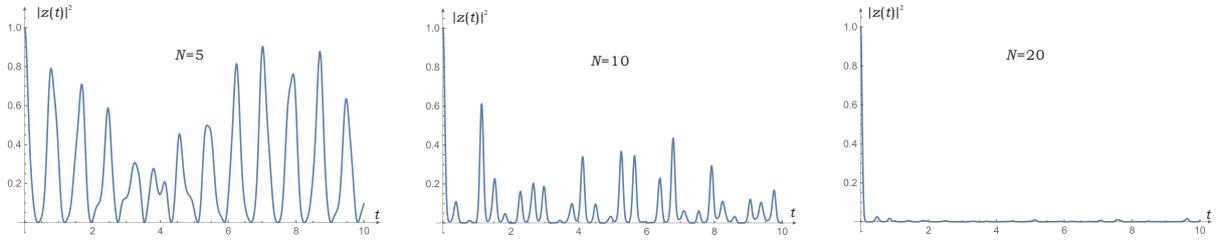


图 4

现在, 我们用上面讨论的模型解释以前的一个问题. 我们以前讨论过最简单的测量模型 —— 被测系统 Q 是一个双值系统, 并且用一个双值系统扮演测量仪器 M. 假设系统和仪器达到如下形式的 pre-measurement state,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+\rangle \otimes |z+\rangle + |z-\rangle \otimes |z-\rangle) \quad (60)$$

其中直积的次序是 系统 \otimes 仪器. 而上述形式可以等价地表示为

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x+\rangle \otimes |x+\rangle + |x-\rangle \otimes |x-\rangle) \quad (61)$$

然后我们说, 如果观测仪器的力学量 σ_z^M , 那么应该利用 (60) 式. 当看到 σ_z^M 的观测结果为 +1 或 -1 的时候, 就可以推知系统的观测量 σ_z^Q 的值分别为 +1 或 -1, 相应的几率都是 $\frac{1}{2}$. 另一方面, 如果我们观测仪器的力学量 σ_x^M , 那么就应该利用 (61) 式, 获得系统的观测量 σ_x^Q 的取值以及几率.

这样一来,

$$\text{我们似乎可以随意地选择仪器的观测量, 以实现对系统的不同的观测量的测量.} \quad (62)$$

这个“似乎”的说法会带来很大麻烦. 我们知道, 对系统的某个观测量作测量的时候, 需要特定的实验过程, 也就是说, 需要在特定的表象中进行, 不能在相同的实验过程中测量不对易的观测量. 可是现在, 当系统和仪器达到 (60) 或 (61) 的形式之后 —— 这是由某个特定的实验过程决定的, 我们竟然可以对仪器的不同的观测量作测量, 进而实现对系统的不同的 (甚至是不对易的) 的观测量的测量, 这岂不是对量子力学基本原理的颠覆?

要反驳这个观点其实并不困难, 注意到, 只是对于形如 (60) 或 (61) 的测量前 (pre-measurement) 的量子态, 我们才可能 (仅仅是可能) 提出这样一个会带来麻烦的问题 (62), 而对于更为一般的测量前的量子态, 则不可能做到对两个不对易的观测量进行严格测量. 例如, 设测量前的量子态为

$$\alpha |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta |1\rangle \otimes |1\rangle$$

其中 $|\alpha|$ 和 $|\beta|$ 都不等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 这个形式可以成功地实现对 σ_z^Q 的测量, 但是, 如果企图通过测量 σ_x^M 实现对系统的 σ_x^Q 测量, 那么

$$\begin{aligned} & \alpha |0\rangle \otimes |0\rangle + \beta |1\rangle \otimes |1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \otimes |x+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) \otimes |x-\rangle \end{aligned}$$

⁵参看 W. H. Zurek, Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse? Physical Review D **24**, 1516-1525 (1981); Environment-induced superselection rules. Physical Review D **26**, 1862-1880 (1982). 以及综述 W. H. Zurek, Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. Reviews of Modern Physics **75**, 715 (2003).

测量 σ_x^M 的结果只是平庸的等几率分布. 量子测量是要面对未知量子态的, 不可能在系统量子态未知的情况下, 经由系统和仪器的相互作用和演化总是得到形如 (60) 或 (61) 的测量前的量子态. 因此, 从测量的角度说, 观点 (62) 是不成立的.

但是, 事情并没有结束. 以上分析和讨论只是在 Hilbert 空间中转悠, 在态矢量的不同表示形式上兜圈子, 而量子测量的结果终究要表现在经典层面上. 也就是说, 仪器必须与环境接触, 受环境的影响, 最终体现出明确的现象. 在下面的讨论中, 我们将看到, 环境的存在和对仪器的影响决定了仪器的哪一个观测量是有用的, 对它的观测是切实可行的. 也就是说, 在有环境影响的情况下, 不是仪器的任意某个观测量都是有用的.

设想系统和仪器达到了如 (60) 所示的量子态, 然后, 仪器 M 和环境 E 之间有相互作用, 但是系统 Q 没有受到环境 E 的影响. 仪器和环境之间的相互作用的形式与 (52) 类似, 不过是把上标 QE 改为 ME .

$$H^{ME} = \sum_{k=1}^N H^{ME_k} \quad (63)$$

实际上, 这里考虑的是由 Q, M 和 E 组成三体量子系统. 环境的初态是 $|\mathcal{E}(0)\rangle$, 由 (54) 式给出, 随时间的演化过程是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle + |1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle) \otimes |\mathcal{E}(0)\rangle \\ \rightarrow & \frac{1}{\sqrt{2}}|0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle \end{aligned} \quad (64)$$

其中 $|\mathcal{E}_0(t)\rangle$ 和 $|\mathcal{E}_1(t)\rangle$ 分别由 (55) 和 (56) 给出.

接着考虑对 M 的 σ_z^M 作测量,

测量 σ_z^M 的结果	相应的系统和环境的状态
+1	$ 0^Q\rangle \otimes \mathcal{E}_0(t)\rangle$
-1	$ 1^Q\rangle \otimes \mathcal{E}_1(t)\rangle$

不论测量 σ_z^M 得到什么结果, 系统和环境都是处于毫无关联的直积态, 就是说, 在测量 σ_z^M 的时候, 环境虽在, 却不会与被测系统 Q 产生任何关联, 在这种情况下, 环境就像不存在一样.

再考虑另外一种情况, 测量 σ_x^M . 为此, 将 (64) 改写为

$$\frac{1}{2}[|0^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + |1^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle] \otimes |x+\rangle + \frac{1}{2}[|1^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle - |0^Q\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle] \otimes |x-\rangle$$

这里, 为了看得更清楚, 在上式中调整了直积的次序, 将仪器放在了最后. 看看测量 σ_x^M 的结果以及相应的系统和环境的状态.

测量 σ_x^M 的结果	相应的系统和环境的状态
+1	$\frac{1}{\sqrt{2}}[0^Q\rangle \otimes \mathcal{E}_0(t)\rangle + 1^Q\rangle \otimes \mathcal{E}_1(t)\rangle]$
-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}[1^Q\rangle \otimes \mathcal{E}_0(t)\rangle - 0^Q\rangle \otimes \mathcal{E}_1(t)\rangle]$

这下麻烦了. 在测量 σ_x^M 得到 ± 1 的时候, 系统和环境都处于纠缠态. 我们不可能把这两个纠缠态表示为 $|x\pm\rangle \otimes |\text{环境的某个状态}\rangle$ 这样的直积形式. 因此, 当仪器和环境有 (63) 所示的相互作用时, 只要仪器的观测量不是

σ_z^M , 都会导致系统和环境处于纠缠态. 这是一个很微妙的现象, 虽然在我们的事先给出的设定中, 系统和环境之间没有发生相互作用, 但是, 借助对仪器的不同的观测方式, 却是可以建立系统和环境之间的量子关联, 即系统和环境处于纠缠态. 而且, 对仪器的不同的观测方式会带来系统和环境之间不同程度的纠缠. 例如, 测量 σ_z^M , 系统和环境之间没有纠缠; 测量 σ_x^M , 系统和环境之间的纠缠达到最大 (不一定是最大纠缠态).

现在可以看到, 在相互作用 (63) 的影响下, 仪器的观测量 σ_x^M 不是一个“好”的观测量, 它无法逃脱环境的影响. 如果对这个“不好”的观测量进行测量, 那么将间接地导致系统和环境的关联, 也就不能实现对系统的任何观测量的严格测量.

还可以换一个视角看待上述结论. 在三体量子态 (64) 中, 对环境求迹. 注意到环境的量子态 $|\mathcal{E}_0(t)\rangle$ 和 $|\mathcal{E}_1(t)\rangle$ 是基本上正交的. 得到系统和仪器的量子态 ρ^{QM} ,

$$\rho^{QM} = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$$

这是一个两体混合态. 在量子测量的意义上, 它不像是以纯态 $c_0|0\rangle|\varphi_0\rangle + c_1|1\rangle|\varphi_1\rangle$ 的形式体现仪器的状态与系统的状态之间的一一对应. 但是也可以通过对仪器的 σ_z^M 的观测实现对系统的 σ_z^Q 的测量. 第一项 $|00\rangle\langle 00| = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$, 它告诉我们, 当仪器的 σ_z^M 表现出结果 +1 的时候, 系统的 σ_z^Q 取值 +1. 对于第二项 $|00\rangle\langle 00| = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ 也有类似的说法.

接下去应该看看对 σ_x^M 的测量, 不过, 为了使讨论的问题稍微具有一些一般性, 我们从头说起. 假设系统的初态是 $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, 与仪器建立的适当的相互作用之后, 二者演化为测量前的两体量子态

$$\alpha|0\rangle \otimes |0\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle$$

这里假定 α 和 β 都是实数. 环境和仪器的相互作用导致了下面的三体纯态,

$$\begin{aligned} & (\alpha|0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle + \beta|1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle) \otimes |\mathcal{E}(0)\rangle \\ \longrightarrow & \alpha|0^Q\rangle \otimes |0^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + \beta|1^Q\rangle \otimes |1^M\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle \end{aligned} \quad (65)$$

对环境求迹之后, 得到系统和仪器的两体混合态,

$$\text{Eq. (65)} \xrightarrow{\text{Tr}_E} \alpha^2|00\rangle\langle 00| + \beta^2|11\rangle\langle 11|$$

这个形式当然可以帮助我们借助观测 σ_z^M 以实现系统的 σ_z^Q 的测量. 但是, 如果观测 σ_x^M 呢?

大家应该验证下表中的结果.

在 $\alpha^2|00\rangle\langle 00| + \beta^2|11\rangle\langle 11|$ 中测量 σ_x^M

测量 σ_x^M 的结果及其几率	相应的系统的状态
+1, $\frac{1}{2}$	$\alpha^2 0\rangle\langle 0 + \beta^2 1\rangle\langle 1 $
-1, $\frac{1}{2}$	$\alpha^2 0\rangle\langle 0 + \beta^2 1\rangle\langle 1 $

对以上结果, 可以说:

- 系统与仪器相互作用之后, 以及仪器和环境相互作用之后, 系统的局部量子态没有改变, 都是 $\alpha^2|0\rangle\langle 0| + \beta^2|1\rangle\langle 1|$. 这是应该的, 因为, 当系统和仪器有了相互作用之后, 随便怎么折腾仪器 —— 只要没有发生选择测量之类的事, 都不会改变系统的局部量子态.
- 对 σ_x^M 的观测不能实现对系统的某个观测量的测量. 不论测量 σ_x^M 的结果是 +1 还是 -1, 相应的系统的状态都是相同的混合态.

Mach-Zehnder 干涉仪

MZ 干涉仪已经在物理光学中讨论过, 量子光学的处理方式要用到产生、湮灭算子, 以后再说. 这里谈论的 MZ 干涉仪并不是面向量子光学的, 而只能算是属于两体量子系统的一个问题.

图 5 是 MZ 干涉仪的示意图. 入射粒子从左下角进入干涉仪. 粒子的状态由两部分组成: 描述空间自由度的量子态和描述内禀自由度的量子态. 前者需要在无穷维 Hilbert 空间中描述, 在这里我们关心的只是水平和垂直两条路径, 所以将其简化为二维复空间, 记作 $\mathcal{H}^P = \mathbb{C}^2$, 上标 P 表示路径 path. \mathcal{H}^P 空间的两个基向量记作 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$, 它们分别表示水平路径和垂直路径. 粒子的自旋设为 $1/2$, 所以描述内禀自由度的空间也是二维复空间, 记作 $\mathcal{H}^S = \mathbb{C}^2$, 上标 S 表示自旋 spin. \mathcal{H}^S 的基向量记作 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$. 于是我们要讨论的是在 $\mathcal{H}^P \otimes \mathcal{H}^S$ 空间中描述的两体量子系统.

5.1 利用 MZ 干涉仪测量两个量子态的整体相位差

两个量子态 $|\psi\rangle$ 和 $|\psi'\rangle$ 的整体相位差定义为

$$\gamma = \arg \langle \psi | \psi' \rangle \quad (66)$$

下面的讨论将显示, 可以用 MZ 干涉仪测量相位差 γ .

图 5 中的 BS1 和 BS2 是两个分束器 (beam splitter). 形象地说, 分束器把入射粒子分为两部分——水平部分和垂直部分. 这里假设分束器是 50 : 50 分束器, 即分为水平和垂直部分的概率都是 $1/2$. 严格地说, 分束器代表了一个酉变换. 在下面的描述中, 这个酉变换是作用于路径空间 \mathcal{H}^P 中的量子态的, 对 \mathcal{H}^S 空间没有任何影响. 酉变换的形式设为 Hadamard 变换

$$U_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

分别作用于水平基向量 $|H\rangle$ 和垂直基向量 $|V\rangle$, 有

$$U_{BS} |H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |H\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle, \quad U_{BS} |V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |H\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |V\rangle$$

图 5 中的两面镜子代表翻转 (flip) 操作, 这也是一个酉变换, 作用于 \mathcal{H}^P 空间, 矩阵形式是

$$U_M = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

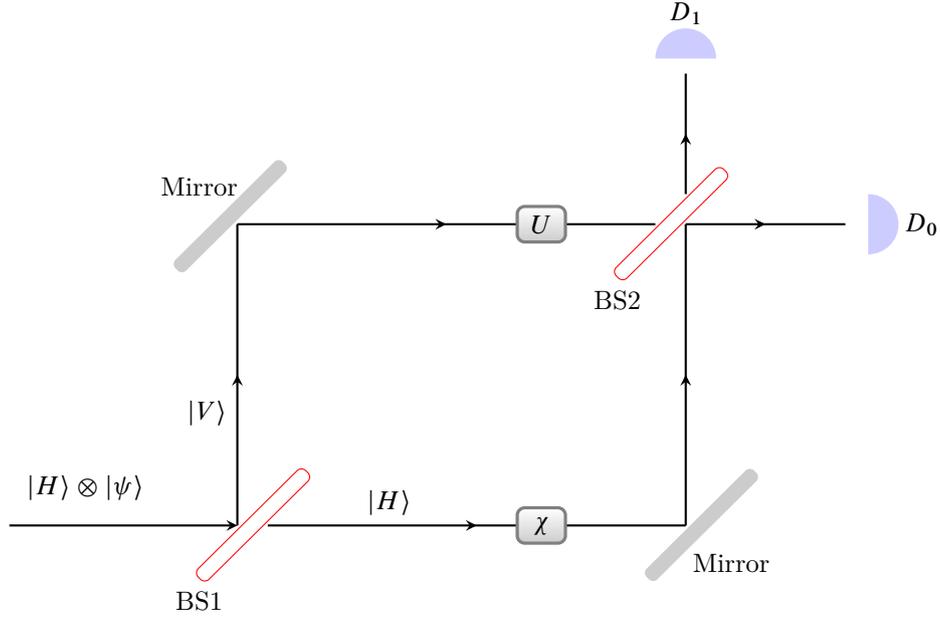


图 5

图 5 中上方路径中的 U 是一个面向自旋的西变换, 作用于 \mathcal{H}^S 空间. 下方路径中的 χ 表示一个面向自旋量子态的相位变换, 即在量子态上乘以单位复数 $e^{i\chi}$.

入射粒子沿水平方向进入 MZ 干涉仪, 初态表示为

$$|H\rangle \otimes |\psi\rangle$$

其中 $|\psi\rangle$ 是粒子的自旋量子态. 逐步写出演化过程.

$$\begin{aligned}
 |H\rangle \otimes |\psi\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle) \otimes |\psi\rangle \\
 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\chi}|H\rangle \otimes |\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle \otimes |\psi\rangle \\
 &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\chi}|V\rangle \otimes |\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle \otimes U|\psi\rangle \\
 &\rightarrow \frac{1}{2}e^{i\chi}(|H\rangle - |V\rangle) \otimes |\psi\rangle + \frac{1}{2}(|H\rangle + |V\rangle) \otimes U|\psi\rangle \\
 &= \frac{1}{2}|H\rangle \otimes [(e^{i\chi}\mathbb{1} + U)|\psi\rangle] + \frac{1}{2}|V\rangle \otimes [(-e^{i\chi}\mathbb{1} + U)|\psi\rangle]
 \end{aligned}$$

如果在第二个 BS 的水平方向上测量, 将得到几率

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1}{4} \langle \psi | (e^{-i\chi}\mathbb{1} + U^\dagger)(e^{i\chi}\mathbb{1} + U) | \psi \rangle \\
 &= \frac{1}{4} (2 + e^{-i\chi} \langle \psi | U | \psi \rangle + e^{i\chi} \langle \psi | U^\dagger | \psi \rangle) \\
 &= \frac{1}{2} [1 + \text{Re}(e^{-i\chi} \langle \psi | U | \psi \rangle)]
 \end{aligned}$$

令 $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$. $\langle \psi | \psi' \rangle = \langle \psi | U | \psi \rangle = w e^{i\gamma}$, 相位 γ 就是 $|\psi\rangle$ 和 $U|\psi\rangle$ 之间的相位差.

$$p_0 = \frac{1}{2} [1 + w \cos(\gamma - \chi)]$$

- 可见度 (visibility) 的定义是

$$\mathcal{V} = \frac{p_0^{\max} - p_0^{\min}}{p_0^{\max} + p_0^{\min}}$$

- 调节 χ , 有 $p_0^{\max} = \frac{1}{2}(1 + w)$, $p_0^{\min} = \frac{1}{2}(1 - w)$, 于是 $\mathcal{V} = w$. 就是 $|\psi\rangle$ 和 $|\psi'\rangle$ 之间的重叠.
- 总的相位差是

$$\gamma = \arg \langle \psi | \psi' \rangle$$

调节 χ , 看到 p_0 的峰值, 这个 χ 值就是 $\gamma \bmod 2\pi$.

至此, 两个量子态之间的内积有了操作上的意义, 它们的重叠程度 $|\langle \psi | \psi' \rangle|$ 对于干涉现象中的可见度, 相位差 $\arg \langle \psi | \psi' \rangle$ 对应于粒子出现在 MZ 干涉仪的某个输出端的最大几率.

光学中干涉现象指的是在接收屏上看到了明暗相间的条纹, 或者说光子在空间的几率分布呈现周期性的变化. 现在讨论的干涉现象指的是记录到的粒子数随相位 χ 的变化. 可见度的周期性变化确实是通过调节 χ 来体现的, 但是, $\langle \psi | \psi' \rangle$ 对干涉现象有重要影响. 如果 $|\psi'\rangle = e^{i\phi} |\psi\rangle$, 那么虽然 $|\psi\rangle$ 和 $|\psi'\rangle$ 之间存在整体相位差 ϕ , 但是可见度达到最大值 1; 如果二者正交, 那么可见度为零, 而且, 在正交情形下, 缺乏整体相位差的定义.

MZ 干涉仪有多种变形,

- 分束器 BS 可以是对称的, 也可以不是对称的.
- 输入的量子态可以是纯态, 也可以是混合态.
- 不同路径上粒子的内禀自由度经历的变换可以是酉变换, 也可以是非酉的.

MZ 干涉仪的作用和意义远非观测干涉现象.

- 路径和干涉现象之间的互补性关系.
- 互补性原理和不确定原理之间的联系.
- 体现不同形式的不确定关系.

如果 BS1 的变换是一般形式的酉变换

设 BS1 对应的酉变换使得

$$|H\rangle \longrightarrow a|H\rangle + b|V\rangle, \quad |V\rangle \longrightarrow -b^*|H\rangle + a^*|V\rangle$$

这里 $|a|^2 + |b|^2 = 1$. 而 BS2 仍然是 Hadamard 变换. 在这种情况下, 在探测器 D_0 上得到的几率是

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{2} (1 + a^* b e^{-i\chi} \langle \psi | U | \psi \rangle + a b^* e^{i\chi} \langle \psi | U^\dagger | \psi \rangle) \\ &= \frac{1}{2} [1 + 2w |a b^*| \cos(\gamma + \phi - \chi)] \end{aligned}$$

其中 $a^* b = |a^* b| e^{i\phi}$. 这时, 可见度是

$$\mathcal{V} = 2w |a^* b|$$

当 $|a| = |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 的时候, $|a^* b|$ 有最大值 $\frac{1}{2}$. 所以, 当 BS1 是对称的时候, 得到最大的可见度.

5.2 Which way

已经知道, 探测器 D_0 和 D_1 记录到粒子的几率分别是

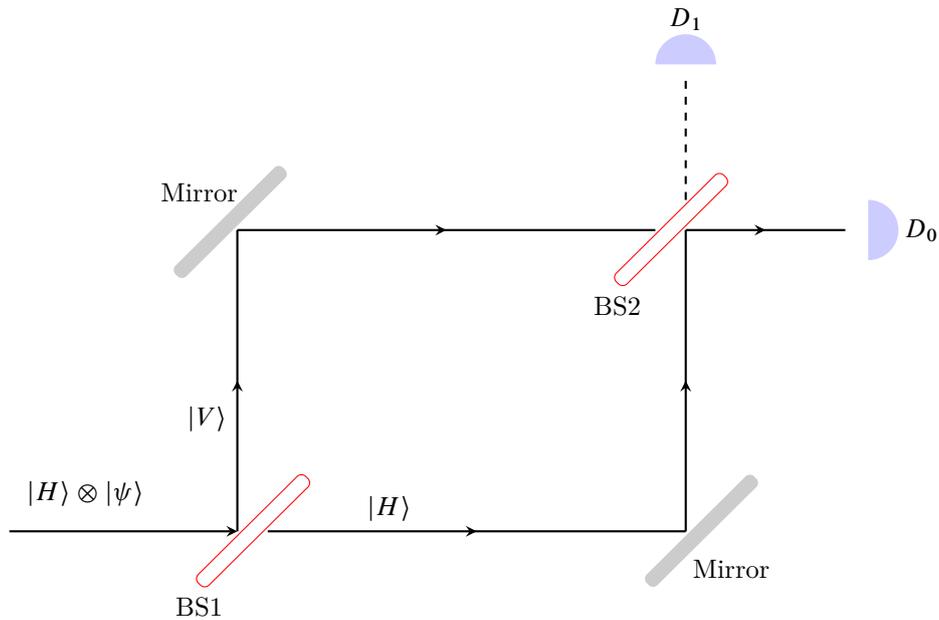
$$p_0 = \frac{1}{2} [1 + \text{Re}(e^{-i\chi} \langle \psi | U | \psi \rangle)],$$

$$p_1 = \frac{1}{2} [1 - \text{Re}(e^{-i\chi} \langle \psi | U | \psi \rangle)]$$

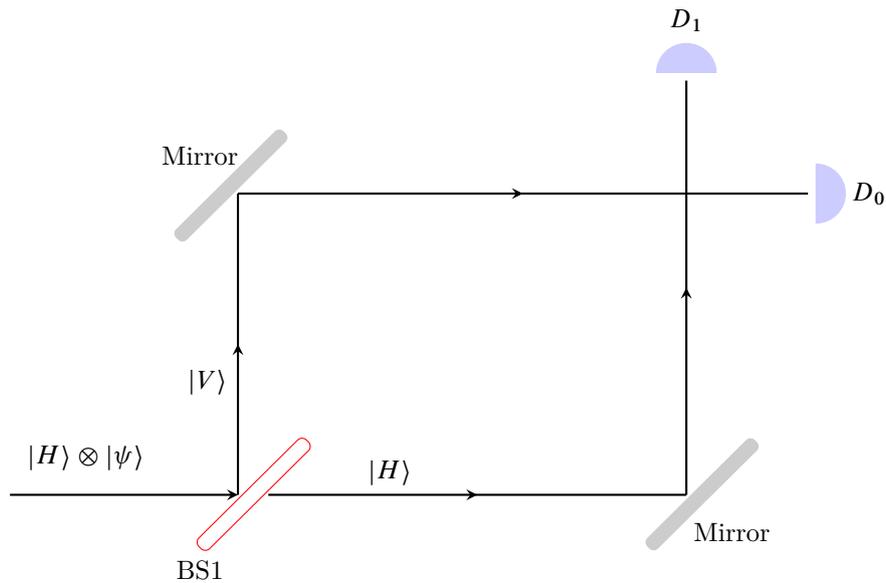
如果上下两条路径上没有任何变换, 即 $\chi = 0, U = 1$, 那么有

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 0.$$

只有探测器 D_0 有响应, 而 D_1 不会记录到任何粒子. 对此, 我们可能会说: “粒子通过了两条路径.” 这是波动观点.



另一方面, 如果没有分束器 BS2, 那么从单粒子源出发的一个粒子经过了 MZ 干涉仪之后, 探测器 D_0 或 D_1 有响应的几率均为 $1/2$, 对此我们可能会说: “粒子通过了上面或者下面的路径.” 这是粒子性的体现.



John Archibald Wheeler

Quantum Theory and Measurement,
 edited by John A. Wheeler and Wojciech H. Zurek

- With the final half-silvered mirror in place the photodetector D_0 goes click-click as the successive photons arrive but the adjacent counter (*i.e.*, D_1) registers nothing. This is **evidence of interference** between the upper and the lower beams; or, in photon language, evidence that each arriving light quantum has arrived by **both routes**. In such experiments, Einstein originally argued, it is unreasonable for a single photon to travel simultaneously two routes.
- Remove the half-silvered mirror, and one will find that the one counter goes off, or the other. Thus the photon has traveled **only one route**.
- It travels only one route, but it travels both routes; it travels both routes, but it travels only one route. What nonsense! How obvious it is that quantum theory is inconsistent!
- In our own day we have learned to state the point even more sharply by way of a so-called **delayed-choice experiment**. There we make the decision whether to put the final half-silvered mirror in place or to take it out at the very last picosecond, after the photon has already accomplished its travel.
- The dependence of what is observed upon the choice of experimental arrangement made Einstein **unhappy**. It conflicts with the view that the universe exists “out there” independent of all acts of observation.
- **In contrast** Bohr stressed that we confront here an inescapable new feature of nature, to be welcomed because of the understanding it gives us. In struggling to make clear to Einstein the central point as he saw it, Bohr found himself forced to introduce the word “**phenomenon**.”
- In today’s words Bohr’s point — and the central point of quantum theory — can be put into a single, simple sentence. “**No elementary phenomenon is a phenomenon until it is a registered (observed) phenomenon.**”
- It is wrong to speak of the “route” of the photon in the experiment of the beam splitter. It is wrong to attribute

a tangibility to the photon in all its travel from the point of entry to its last instant of flight.

- A phenomenon is not yet a phenomenon until it has been brought to a close by an irreversible act of amplification such as the blackening of a grain of silver bromide emulsion or the triggering of a photodetector.
- How can one contemplate indeterminism, complementarity and “phenomenon” without being reminded of the words of Gertrude Stern about modern art?
“It looks strange and it looks strange and it looks very strange; and then **suddenly it doesn’t look strange at all** and you can’t understand what made it look strange in the first place.”

Zeilinger, A., Weihs, G., Jennewein, T. and Aspelmeyer, M.

Happy centenary, photon,
Nature **433**, 230-238 (2005)

- When analysing quantum interference we can fall into all kinds of traps. The general conceptual problem is that we tend to reify — to take too realistically — concepts like wave and particle. Indeed if we consider the quantum state representing the wave simply as a calculational tool, problems do not arise.
- In this case, we should not talk about a wave propagating through the double-slit setup or through a Mach-Zehnder interferometer; the quantum state is simply a tool to calculate probabilities.
- Probabilities of the photon being somewhere? No, we should be even more cautious and only talk about probabilities of a photon detector firing if it is placed somewhere.
- One might be tempted, as was Einstein, to consider the photon as being localized at some place with us just not knowing that place. But, whenever we talk about a particle, or more specifically a photon, we should only mean that which a “click in the detector” refers to.

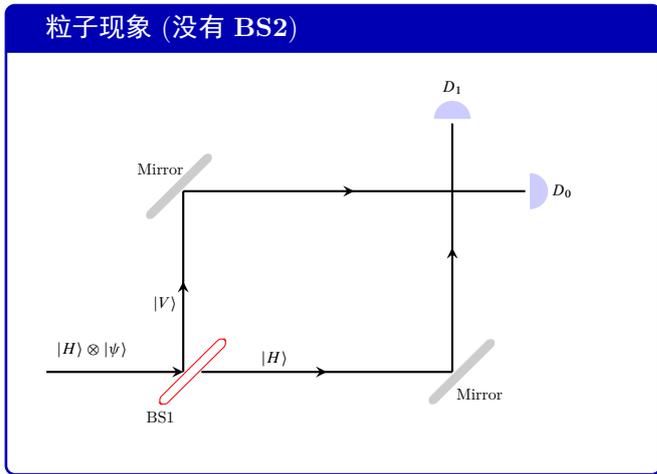
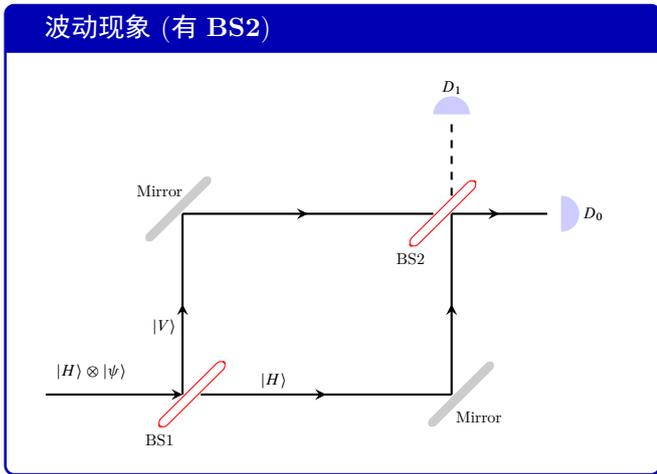
5.3 波粒二象性

在某些场合中, 微观粒子表现出波动性, 例如 MZ 干涉仪中第二个分束器 BS2 存在的时候, 在探测器 D_0 上总是能观测到粒子, 而探测器 D_1 上总是观测不到粒子. 在另外一些场合中, 微观粒子表现出粒子性, 例如在 MZ 干涉仪中去掉第二个分束器 BS2, 那么两个探测器观测到粒子的几率都是 $1/2$, 粒子经过的路径可以通过哪个探测器有响应来判断. 所谓波粒二象性, 就是我们常说的: 微观粒子不同的表象中表现出不同的现象; 不同的表象不相容, 不能共存, 因而波动现象和粒子现象不会同时出现.

“波动性”或“粒子性”的说法不是很合适, 这很容易让人觉得“波动”或“粒子”是量子系统本身具有的某些客观属性. 而实际上“波动”和“粒子”是对现象的描述, 是在特定的观测条件下看到的实验结果. 不过我们还是采用约定俗成的说法: 波动性, 粒子性, 波粒二象性.

如果我们放松对波动现象和粒子现象的明晰性的要求, 就是说, 如果我们不追求最理想的可见度 (对应于波动现象) 和最理想的路径可区分度 (对应于粒子现象), 那么可以看到波动现象和粒子现象以模糊的方式同时出现, 这是广义量子测量的结果.

描述波动现象的可见度和描述粒子现象的路径可区分度满足一个“此消彼长”的关系, 这被理解为互补性原理或不确定关系的体现. 关于互补性原理和不确定关系哪一个更为基本这个问题, 一直存在争论.



multicolumn=2

比较上述两种情形, 并注意到分束器的变换是 Hadamard 变换, 将 $|H\rangle$ 变换为 $|\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$, 将 $|V\rangle$ 变换为 $|\searrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle - |V\rangle)$. 因此, 如果设想 ① 在右图中添上 BS2, 并且 ② 将探测器换成另外一组 D'_0 和 D'_1 , 它们对应的测量算子分别是

$$\Pi'_0 = |\nearrow\rangle\langle\nearrow|, \quad \Pi'_1 = |\searrow\rangle\langle\searrow|$$

那么经过 ① 和 ② 两步变换后的实验过程应该与原来的等价. 虽然在实际情况中难以描绘 $|\nearrow\rangle$ 和 $|\searrow\rangle$ 对应于怎样的路径, 但是这让我们可以用 \mathbb{C}^2 中观测量描述上述两个实验:

波动现象的实验 有 BS2, 测量对象相当于 \mathbb{C}^2 的观测量 σ_z .

粒子现象的实验 当没有 BS2 的时候, 测量对象相当于 \mathbb{C}^2 的观测量 σ_x . 可以等价地说, 添加 BS2, 测量对象转变为 σ_x .

于是, 如果统一地采用存在 BS2 的实验装置, 那么波粒二象性可以从理论上转述为 \mathbb{C}^2 空间中分别对两个互补观测量进行测量得到的结果. 强调分别测量的意义在于, 这是两个彼此独立的测量过程, 不涉及其中一个观测量的测量会对另一个产生影响这类问题.

路径的可区分性对波动性的影响

已知的事实是, 如果通过测量得知粒子通过了哪一条路径, 那么波动性消失. 这区别于上面提到的“分别对两个互补的观测量进行测量”. 测量粒子经过的路径, 然后再观测波动现象, 这是一个实验过程中先后进行的两次测量. 前一次测量对后一次测量有影响甚至破坏, 这是互补性原理或不确定关系的另一种体现. 以前的讲义中有相关分析, 但图像不够清晰, 现在换一种方式讨论.

- 在 MZ 干涉仪的两条路径上设置测量过程, 如图 6 所示. 这里涉及 4 个量子系统, 它们是
- P : 表示路径, 有水平和竖直两个状态, 分别记作 $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$, 可以在两维复空间中描述, 即 $\mathcal{H}^P = \mathbb{C}^2$.
- Q : 表示粒子的自旋, 对应的 Hilbert 空间是 $\mathcal{H}^Q = \mathbb{C}^2$.
- M_1 : 在路径 $|H\rangle$ 上的测量仪器, 对粒子的自旋部分进行测量, Hilbert 空间记作 \mathcal{H}^{M_1} .
- M_2 : 在路径 $|V\rangle$ 上的测量仪器, 对粒子的自旋部分进行测量, Hilbert 空间记作 \mathcal{H}^{M_2} .

在下面的计算中, 直积的次序是

$$\mathcal{H}^P \otimes \mathcal{H}^Q \otimes \mathcal{H}^{M_1} \otimes \mathcal{H}^{M_2}$$

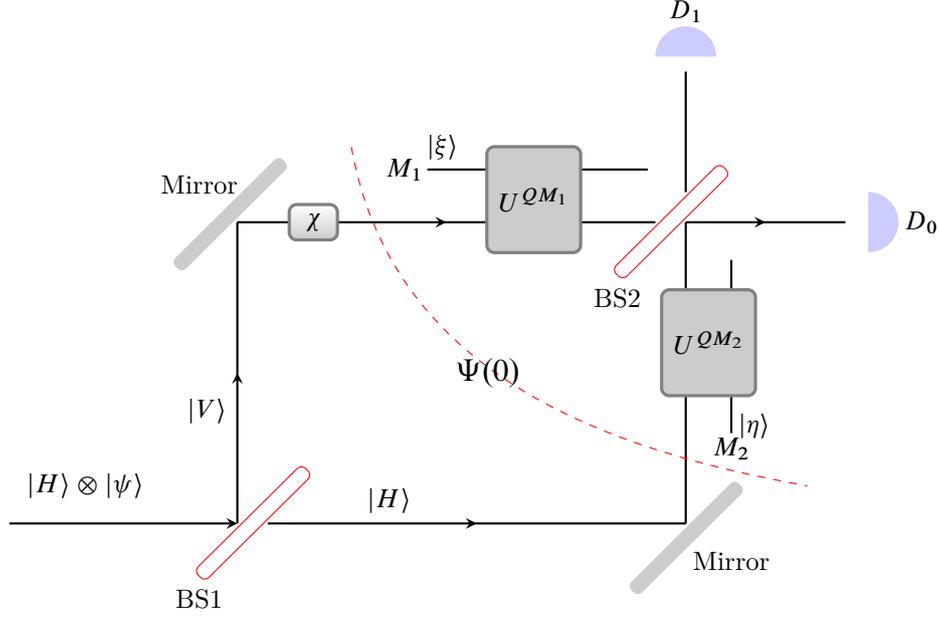


图 6: 量子系统在 MZ 干涉仪的两条路径上经历开放演化

四个量子系统的初态依次设为 $|H\rangle$, $|\psi\rangle$, $|\xi\rangle$, $|\eta\rangle$. 现在开始按照图 6 所示过程演化. 首先是 P 经过分束器 BS1, 这是 Hadamard 变换; 接着经过平面镜的反射, 这是翻转变换 σ_x . 然后在上面路径的水平部分有相位变换 χ , 这是作用于自旋部分的. 由于相位变换是 $U(1)$ 变换, 只是在相应的量子态上乘上一个单位复数, 所以在数学形式上可以归属于对路径的变换. 于是得到在图中虚线位置处的四体量子态, 记作 $\Psi(0)$,

$$\Psi(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\phi} \\ e^{-i\phi} & 1 \end{pmatrix} \otimes \psi \otimes \xi \otimes \eta$$

这里采用了密度矩阵的形式.

在水平路径上, 仪器 M_1 与系统 Q 之间有相互作用, 共同的演化由酉算子 U^{QM_1} 决定; 在竖直路径上, 仪器 M_2 与系统 Q 之间有相互作用, 共同的演化由酉算子 U^{QM_2} 决定. 将这两个酉算子表示为

$$U^{QM_1} = \sum_{j,k} u_{jk} \otimes |j\rangle\langle k|, \quad U^{QM_2} = \sum_{m,n} v_{mn} \otimes |m\rangle\langle n| \quad (67)$$

其中 $|j\rangle$ 或 $|k\rangle$ 是 \mathcal{H}^{M_1} 的基向量, $|m\rangle$ 或 $|n\rangle$ 是 \mathcal{H}^{M_2} 的基向量. 注意 u_{jk} 和 v_{mn} 都是 \mathcal{H}^Q 上的算子. U^{QM_1} 和 U^{QM_2} 带来的对系统 Q 的 Kraus 算子分别是

$$K_j = \sum_k u_{jk} \langle k|\xi\rangle, \quad J_m = \sum_n v_{mn} \langle n|\eta\rangle$$

从图中虚线位置开始, 整体酉变换是由路径 P 控制的酉变换: 在路径 $|H\rangle$ 上, 系统 Q 和仪器 M_1 经历酉变换 U^{QM_1} ; 在路径 $|V\rangle$ 上, 系统 Q 和仪器 M_2 经历酉变换 U^{QM_2} . 考虑了 (67) 式之后, 整体酉变换有如下形式,

$$U = \sum_{j,k} |H\rangle\langle H| \otimes u_{jk} \otimes |j\rangle\langle k| \otimes \mathbb{1} + \sum_{m,n} |V\rangle\langle V| \otimes v_{mn} \otimes \mathbb{1} \otimes |m\rangle\langle n|$$

酉变换 U 对整体量子态 $\Psi(0)$ 的变换结果是

$$\Psi(t) = U\Psi(0)U^\dagger$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k;j',k'} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes u_{jk} \psi u_{j'k'}^\dagger \otimes \langle k|\xi|k'\rangle |j\rangle\langle j'| \otimes \eta \\
&+ \sum_{m,n;m',n'} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes v_{m,n} \psi v_{m'n'}^\dagger \otimes \xi \otimes \langle n|\eta|n'\rangle |m\rangle\langle m'| \\
&+ \sum_{j,k;m',n'} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes u_{jk} \psi v_{m'n'}^\dagger \otimes |j\rangle\langle k| \xi \otimes \eta |n'\rangle\langle m'| \\
&+ \sum_{j',k';m,n} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\phi} & 0 \end{pmatrix} \otimes v_{mn} \psi u_{j'k'}^\dagger \otimes \xi |k'\rangle\langle j'| \otimes |m\rangle\langle n| \eta
\end{aligned}$$

接下来就路径 P 和系统 Q 就要进入分束器 BS2, 但是仪器 M_1 和 M_2 不受分束器的影响, 所以我们只需考虑 P 和 Q . 在 $\Psi(t)$ 中对 M_1 和 M_2 求部分迹, 就得到了 $\rho^{PQ}(t) = \text{Tr}_{M_1 M_2} \Psi(t)$. 对 $\Psi(t)$ 的表达式中的四项逐一计算 $\text{Tr}_{M_1 M_2}$,

$$\begin{aligned}
\text{第一项} &\xrightarrow{\text{Tr}_{M_1 M_2}} \frac{1}{2} |0\rangle\langle 0| \otimes \sum_j K_j \psi K_j^\dagger \\
\text{第二项} &\xrightarrow{\text{Tr}_{M_1 M_2}} \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| \otimes \sum_m J_m \psi J_m^\dagger \\
\text{第三项} &\xrightarrow{\text{Tr}_{M_1 M_2}} \frac{1}{2} e^{i\phi} |0\rangle\langle 1| \otimes \left(\sum_j \langle \xi|j\rangle K_j \right) \psi \left(\sum_m \langle \eta|m\rangle J_m \right)^\dagger \\
\text{第四项} &\xrightarrow{\text{Tr}_{M_1 M_2}} \frac{1}{2} e^{-i\phi} |1\rangle\langle 0| \otimes \left(\sum_m \langle \eta|m\rangle J_m \right) \psi \left(\sum_j \langle \xi|j\rangle K_j \right)^\dagger
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_j \langle \xi|j\rangle K_j &= \sum_{j,k} \langle k|\xi\rangle \langle \xi|j\rangle u_{jk} = \langle \xi|U^{QM_1}|\xi\rangle := K_\xi \\
\sum_m \langle \eta|m\rangle J_m &= \langle \eta|U^{QM_2}|\eta\rangle := J_\eta
\end{aligned}$$

算子 K_ξ 的意思是: 系统 Q 与仪器 M_1 经历了酉变换 U^{QM_1} 之后, 对 M_1 作投影测量, 测量算子是 $|\xi\rangle\langle \xi|$; 算子 J_η 的意思是: 系统 Q 与仪器 M_2 经历了酉变换 U^{QM_2} 之后, 对 M_2 作投影测量, 测量算子是 $|\eta\rangle\langle \eta|$.

至此得到了 $\rho^{PQ}(t)$. 然后可以考虑 BS2 对路径的变换, 接着计算探测器 D_0 和 D_1 记录到粒子的几率. 这个过程等价于拿掉 BS2, 并将探测器的观测对象改为 σ_x^P . 在 $\rho^{PQ}(t)$ 测量 σ_x^P , 得到结果 $+1$ 的几率是

$$\text{Prob}(\sigma_x^R = +1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{i\phi} \text{Tr}[\psi J_\eta^\dagger K_\xi] + \frac{1}{4} e^{-i\phi} \text{Tr}[\psi K_\xi^\dagger J_\eta]$$

进而得到可见度

$$\mathcal{V} = \left| \text{Tr}[\psi J_\eta^\dagger K_\xi] \right| \quad (68)$$

分析一个具体的例子

设系统 Q 是一个自旋 1/2 的粒子, 其初态是

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$$

在上面的过程中, 去掉竖直路径上的测量, 只保留水平路径上的测量, 即 $U^{QM_2} = 1$, 由此带来 $J_m = J_\eta = 1$. 仪器 M_1 设为自旋 $1/2$ 粒子, 其初态为

$$|\xi\rangle = |x+\rangle$$

对于 Q 和 M_1 的酉演化, 设为

$$U^{QM_1}(t) = \exp \{igt\sigma_z^Q \otimes \sigma_y^{M_1}\}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau & 0 & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \tau & -\sin \tau \\ 0 & 0 & \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \quad (\text{其中 } \tau = gt)$$

容易算出 $K_\xi = 1 \cos \tau$, 进而给出可见度

$$\mathcal{V}(\tau) = |\text{Tr}(\psi K_\xi)| = \cos \tau$$

当 $\tau = \frac{\pi}{4}$ 时, 对应理想测量, 此时的可见度为 $\mathcal{V}(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

当 $\tau = \frac{\pi}{2}$ 时, 系统 Q 和仪器 M_1 的状态是 $(c_0|0\rangle - c_1|1\rangle) \otimes |x-\rangle$, 没有实现有意义的测量, 而此时可见度为 $\mathcal{V}(\frac{\pi}{2}) = 0$.