

第一章 Stern-Gerlach 实验 双值量子系统 量子“小球”

1

题注

对这一章的标题作简要说明.

1.1. Stern-Gerlach (SG) 实验

高温银原子通过非均匀磁场, 在接收屏上出现两体分开的条纹, 如图 1, 2 所示.

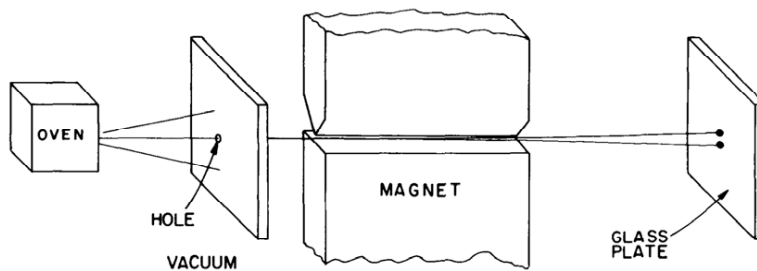


图 1: From *Lectures on physics* Vol 2 by Feynman, Leyton and Sands.

实际的观测结果如下图所示.

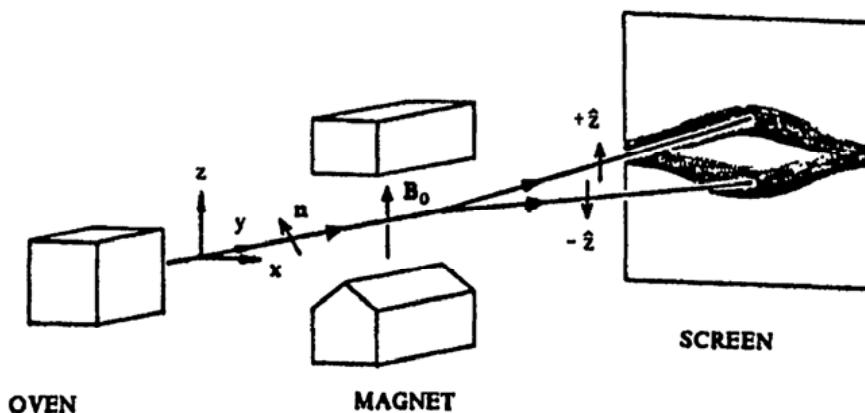


图 2: From P. Busch and F. E. Schroeck, *On the Reality of Spin and Helicity*, *Foundations of Physics* 19, 807 (1989).

在实际实验中, 由于磁场的边缘效应, 接收屏上的条纹并不是完全分开的. 在下面的讨论中, 我们只关心理想情形, 将观测到的现象简单地描述为: 屏上出现两个彼此分离的斑点. 这两块斑点是明确的可以严格区分的宏观现象.

SG 实验揭示了不能用经典电磁理论解释的现象 (回顾原子物理学中的内容). 在 SG 实验中, 微观粒子的表现行为在一定程度上像是一个具有磁矩 μ 的小磁针. 类比于电磁学中磁矩, 并借用这个称谓, 认为微观粒子具有磁矩 $\hat{\mu}$ (以后我们省略上标 ^). 需要注意的是, 量子力学中的磁矩和电磁学中的磁矩是截然不同的两个概念. 进一步认为, 磁矩正比于自旋角动量,

$$\mu \propto \mathbf{S}$$

SG 实验观测的是微观粒子的自旋角动量.

看到的是接收屏上的斑点, 而不是粒子的自旋. 根据落点的位置推断粒子的自旋方向.

1.2. 双值量子系统

考虑对微观粒子进行某种类型的测量, 如果最多只能观测到两个可以严格区分的现象, 那么把这种微观粒子称为双值 (two-valued) 量子系统.

银原子的自旋在 SG 实验中表现出“双值”特性, 它是双值量子系统. 至于银原子的能级, 这不是 SG 实验所关心的.

双值量子系统也被称为两态 (two-state) 量子系统.

在数学形式中, 描述双值量子系统的空间是两维复空间, 记作 \mathbb{C}^2 . “双值”的意思是, 这类量子系统的观测量有且仅有两个本征值, 这两个本征值对应于观测到的两个现象, 并可以用来标记这两个现象.

双值量子系统是最简单的量子系统.

关于量子力学中的“值”

在经典力学中, 物理量的值反映了系统的某种固有的属性. 在量子力学中, 可以说物理量的本征值或期望值. 本征值是对物理量进行理想测量得到的结果, 期望值是在特定的量子态中本征值以几率为权重的加权平均. 但是, 不能认为本征值具有经典意义上的客观实在性. 在以后关于互文性 (contextuality) 讨论中再做解释.

1.3. 量子小球

参看文献 [1]. Albert 在该书的第一章讨论了电子的“颜色”和“硬度”, 这实际上就是在谈论 Stern-Gerlach 实验, 所谓的“颜色”和“硬度”实际上对应于不同方向上电子的磁矩, 或者说自旋角动量在不同方向上的分量.

在这里, 我们索性不说电子了, 而是说量子“小球”.

量子小球是从 SG 实验中抽象出来的模型, 描述理想情形下的双值量子系统. 它是量子力学这门课的表象, 我们将用它来叙述量子力学的基本概念和主要内容.

2

经典小球

在讨论量子小球之前, 先说一下经典小球.

考虑最为简单的模型: 经典世界中的一个小球. 它可以有很多不同的属性, 我们只关心其中的两个: 颜色和硬度.

用 C 表示颜色属性, 用 H 表示硬度属性.

再假设每一个属性只有两个状态, 即两个取值. C 属性的取值记作 $c = 0, 1$, 其中 0 表示白色, 1 表示黑色. H 属性的取值记作 $h = 0, 1$, 其中 0 表示硬, 1 表示软.

于是, 小球的属性可以用一个二元数组表示, (c, h) , $c, h = 0, 1$. 这个二元数组就是小球的经典意义上的“态”.

我们可以说: “这是一个白色的硬球”, 或者说, 小球处于状态 $(0, 0)$. 在这句话中, 包含了两个表象 —— 颜色表象和硬度表象. 更细致地说, 我们首先在颜色表象中对小球进行观测, 然后在硬度表象中观测. 我们还可以说: “这是一个硬的白球”. 先是硬度表象, 再是颜色表象. 这两种说法是等价的, 于是我们说, 这两个表象可以对易. 进而, 在颜色表象中看到的现象和硬度表象中看到的现象是彼此相容的, 是可以共存的.

$$\text{对易} \implies \text{相容}$$

在经典世界中, 不同的表象是彼此相容的. 在一个表象中进行的测量不会影响到在另一个表象中的测量.

概率 设想一个大袋子里装了很多球. 对其中的一部分 (样本) 进行观测, 得到频度 (frequency), 然后可以有概率 $p(c)$ 或 $p(h)$, 分别是观测到某种颜色或某种软硬度到概率.

还可以有联合概率, $p(c, h)$, 它是两个事件 c 和 h 同时出现的概率. 这里到“同时”未必是“同一时刻”的意思. 由于 C 测量和 H 测量可以对易, 这两个测量过程相容, 它们的测量结果可以共存. 所以, “同时”应该理解为“共存”.

例如, $p(c = 0, h = 0)$ 指的是, 得到白色硬球的概率. 我们把这一类概率称为联合 (joint) 概率.

可以从联合得到边缘 (marginal), 例如

$$p(c = 0) = p(c = 0, h = 0) + p(c = 0, h = 1)$$

$$p(h = 1) = p(c = 0, h = 1) + p(c = 1, h = 1)$$

如果两个事件不相容, 那么就不存在联合几率, 也不存在从联合到边缘的求和计算过程.

3

量子小球

3.1. 测量仪器

测量仪器有两种,

$$C\text{-box} \quad H\text{-box}$$

对应于两个不同的表象, C 表象和 H 表象.

测量装置的一端联系着微观世界, 另一端将体现观测结果. 观测结果是宏观的经典层面上的现象.

C 仪器

C 仪器的左侧有一个入口, 量子小球通过这个入口进入 C 仪器中. 仪器的右侧有两个出口, 分别叫做白出口和黑出口. 如果量子小球从白出口 (或者黑出口) 出来了, 我们就说量子小球在颜色检验中表现出白色 (或者黑色).

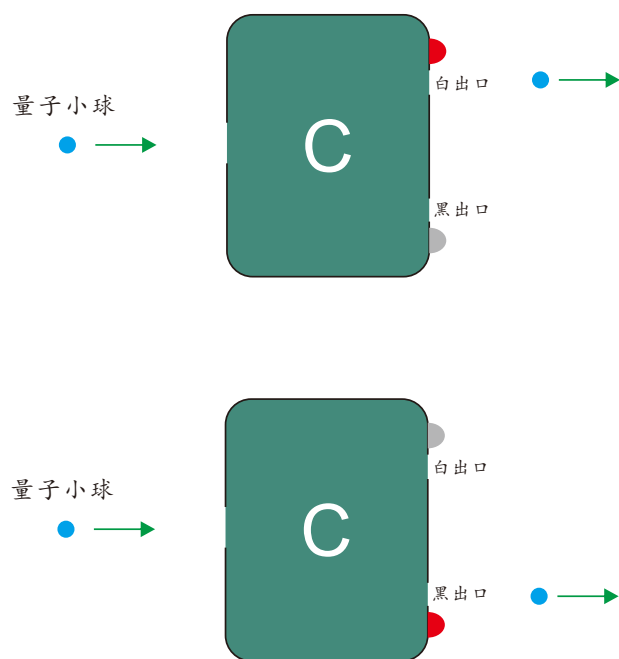


图 3

当然，量子小球是看不见的，怎么知道它们是从哪个出口出去的呢？在两个出口上安装指示灯，如果白出口上的灯亮了，就表明量子小球从白出口出去了，量子小球在这个检测过程中表现出白色；如果黑出口上的灯亮了，就表明量子小球从黑出口出去了，量子小球在这个检测过程中表现出黑色。如图 3 所示。

还需要说明的是，我们并没有看到白色或黑色。实际上，这不过是为了区分不同的观测结果而人为设定的一种说法。已经假设量子小球在颜色检验中只能表现出两个不同的结果，我们把其中一个结果叫做白色，另一个结果叫做黑色。当然也可以把它们分别叫做红色和绿色。为了看到并且区分这两个不同的结果，我们在两个出口上安装了指示灯。其中一个指示灯亮了，就对应一种观测结果，姑且叫做白色；另一个指示灯亮了，就对应另一种观测结果，姑且叫做黑色。

只有被观测到的才能被称作现象。我们为现象赋予“真实”、“客观”这样一类描述，但也止步于此。

H 仪器

设想量子小球可以表现出另一类型的现象，姑且叫做硬度。同样地为了简单起见，假设量子小球只会表现出两种硬度——硬的和软的。

为了检测量子小球的硬度，我们需要使用另一个仪器，叫做 H 仪器。和 C 仪器类似，H 仪器的左侧有一个入口，右侧有两个出口，一个叫做硬出口，另一个叫做软出口。两个出口上各有一盏指示灯，用来表明量子小球是从哪一个出口出去的，或者说，用来表明量子小球在关于硬度的检测中表现出怎样的现象。如图 4 所示。

3.2. 颜色检验的结果

用 C 仪器检测量子小球，如图 5 所示。可以看到：

1. 当量子小球一个一个地进入 C 仪器时，每次只有一盏指示灯闪亮，表明量子小球要么从白出口出来，要么从黑出口出来。两盏灯不会同时亮，就是说，一个量子小球不会同时从两个出口出来。

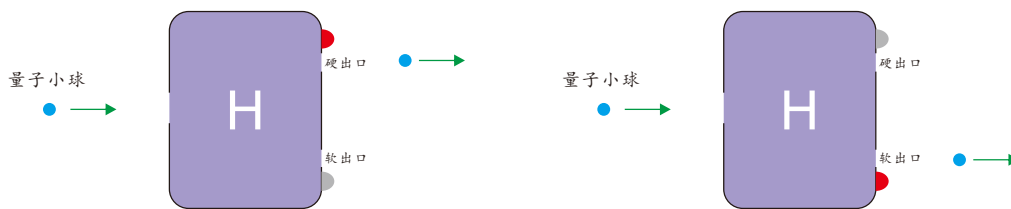


图 4

2. 某一个量子小球进入 C 仪器之后, 我们无法断定哪一个出口上的指示灯会闪亮. 但是, 随着进入 C 仪器的量子小球越来越多, 观测结果呈现一定的规律: 白出口上指示灯闪亮的可能性和黑出口上指示灯闪亮的可能性均为 $1/2$.

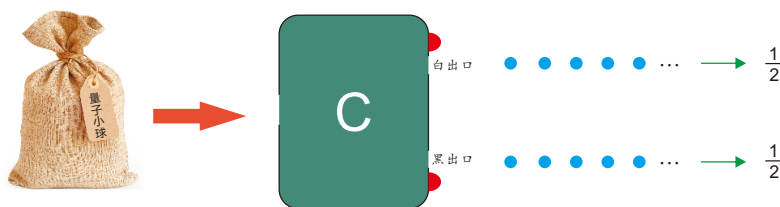


图 5: 在这里和以后的图示中, 当我们把两个出口上的指示灯都画成红色的时候, 只是为了说明在实验过程中不会只有一个指示灯在闪亮, 而不是两个指示灯同时闪亮.

第一个现象容易理解, 向 C 仪器输入一个量子小球, 不会在输出端出来两个. 第二个现象可以用经典小球作类比: 一大袋子经典小球, 其中一半是白球, 另一半是黑球. 需要注意的是, 这个类比并不严格, 但是可以接受.

3.3. 硬度检验的结果

与颜色检验的结果类似. 如图 6 所示.

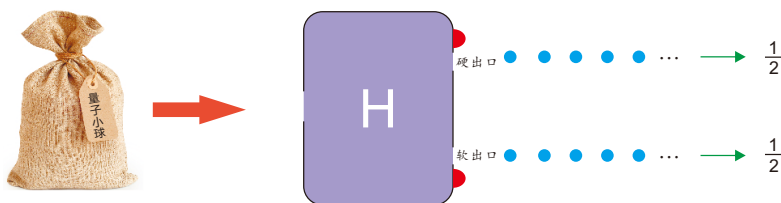


图 6: 让量子小球一个一个地进入 H 仪器, 每次只会看到一个指示灯闪亮, 而且, 观测到现象“硬”和观测到现象“软”的可能性均为 $1/2$.

这个现象也可以用经典小球作类比.

3.4. 重复检验

在图 7 中, 第一次颜色检验结束之后紧接着再做一次颜色检验.

C1 仪器白出口上的指示灯不断闪亮, 而黑出口上的指示灯始终不亮; C2 仪器黑出口上的指示灯不断闪亮, 而白出口上的指示灯始终不亮.

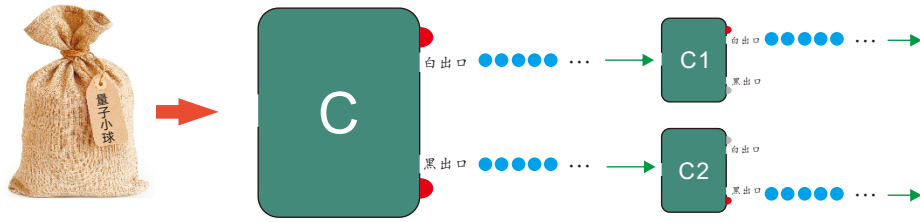


图 7

同样地, 关于硬度的重复检验有类似的结果.

重复检验的结果是确定的, 不再是随机的.

在进行重复检验时, 没有表象的改变.

3.5. 颜色 – 硬度 (C-H) 检验

如图 8 所示, 这是一个测量序列, 包含两个不同的测量过程.

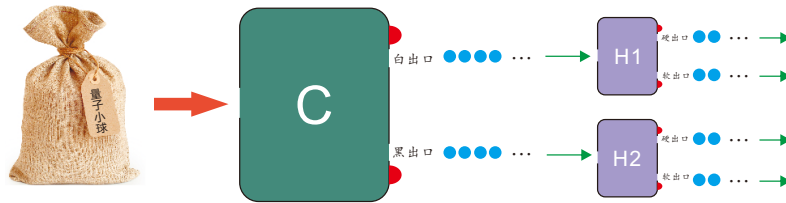


图 8

看到的现象是: 检测硬度的两个仪器, H1 和 H2, 黑出口和白出口上指示灯闪亮的几率均为 1/2.

交换测量次序, 进行 H-C 序列测量, 看到的现象类似.

以上现象也可以用经典小球类比 (仅仅是类比). 一个大袋子装了很多经典小球, 其中 (白, 硬), (白, 软), (黑, 硬), (黑, 软) 各占四分之一, 那么, 对经典小球的检验结果类似于对量子小球的 C-H 或 H-C 检验结果.

3.6. 颜色 – 硬度 – 颜色 (C-H-C) 检验

包含三个测量过程的测量序列, 如图 9 所示.

看到的现象是: 从 C1 到 C4, 在每一个仪器的输出端, 白出口和黑出口上指示灯闪亮几率均为 1/2.

这个现象不能用经典小球类比, 因为经典小球模型给出的结果是, C1 和 C2 仪器只有白出口上的指示灯闪亮, C3 和 C4 仪器只有黑出口上的指示灯闪亮.

序列测量 H-C-H 与此类似, 也不能用经典小球模型类比.

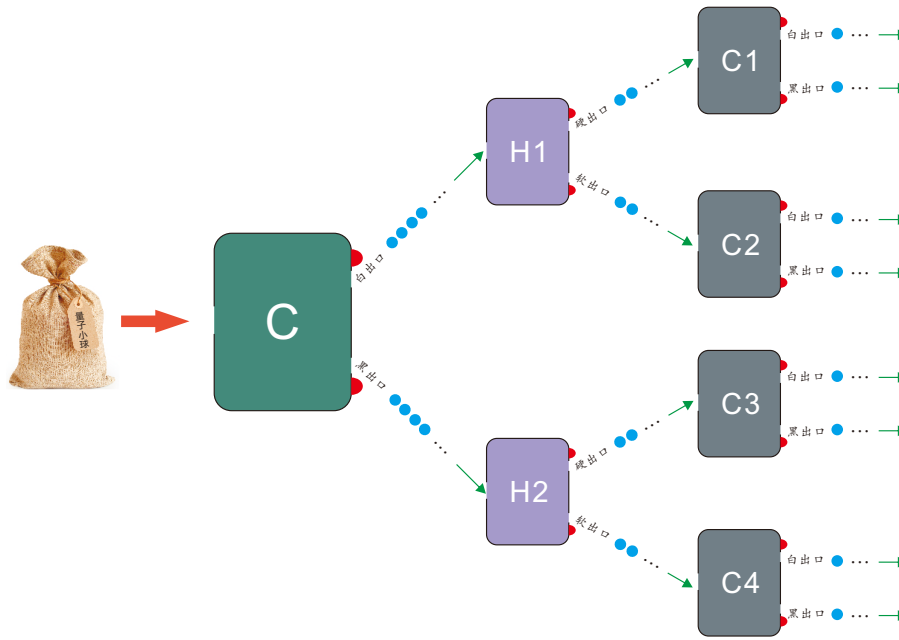


图 9

3.7. 共存与对易

简单地说, 如果我们可以把两种类型的测量结果 (比如现象“白”和现象“硬”) 放在一起说, 那么这两种现象就是可以共存的 (coexistent), 也被称作相容的 (compatible).

经典世界中的现象是可以共存的, 是彼此相容的. 比如可以说, “这是一个白色的硬球”. 又比如, 相空间中的一个点的位置是用位置和动量描述的, 即 (x, p) , 在任意某个时刻, 位置和动量都具体确定的值, 可以放在一起说.

在量子情形下, 前面讨论的 C-H-C 测量揭示了一个事实: 不同类型的测量结果不能放在一起说.

颜色检验的结果和硬度检验的结果不共存, 指的是, 不存在这样的量子小球, 它们在颜色检验中一定表现出某种现象 (比如“白”), 并且在硬度检验中也一定表现出某种现象 (比如“硬”).

能否对易

从操作的角度讨论测量过程能否对易. 分别用 C-H 和 H-C 两个测量序列检验处于某种状态量子小球, 并且假设检验过程没有摧毁量子小球. 如果对于任意状态的量子小球, 经过了 C-H 测量后的状态和经过了 H-C 测量后的状态是相同的, 那么就表明 C 测量与 H 测量是对易, 或者说, C 表象和 H 表象是相容的.

先考虑如图 8 所示的 C-H 测量序列. 我们把实验过程作一些修改, 让 C 仪器的白出口和黑出口出来的量子小球汇聚在一起, 然后让它们通过一个 (而不是两个) H 仪器, 这相当于把原来的两个 H 仪器合二为一, 如图 10 所示. 显然, 从 H 仪器的硬出口和软出口出来的量子小球各占一半, 把经历了这个测量序列的量子小球称为 C-H 量子小球.

交换测量次序, 得到 H-C 测量序列, 如图 11 所示. 显然, 从 C 仪器的白出口和黑出口出来的量子小球各占一半, 把经历了这个测量序列的量子小球称为 H-C 量子小球.

接下来的问题是, C-H 量子小球和 H-C 量子小球的状态是不是一样的? 不能妄谈量子小球的状态, 需要通过测量, 根据看到的现象回答这个问题.

用所有可能的方式测量 C-H 量子小球和 H-C 量子小球, 如果得到的结果相同, 那么才能说这两种量子小球的状态是

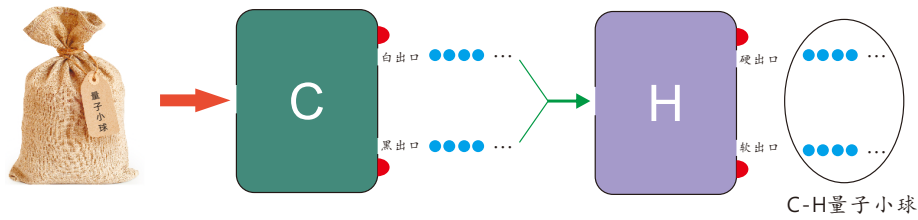


图 10

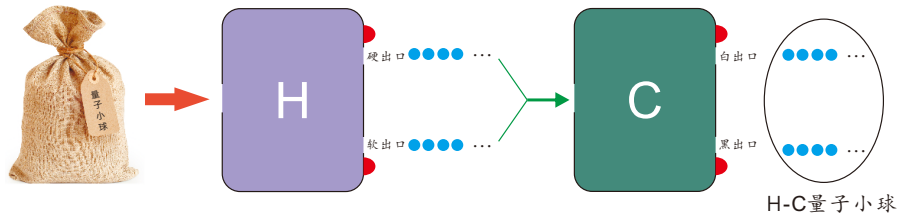


图 11

相同的. 只要有一种测量过程给出了不同的结果, 就表明这两种量子小球的状态是不同的.

考虑用 C 仪器测量 C-H 量子小球, 可以看到如图 12 所示的结果. 用 C 仪器检验 H-C 量子小球, 看到如图 13 所示的

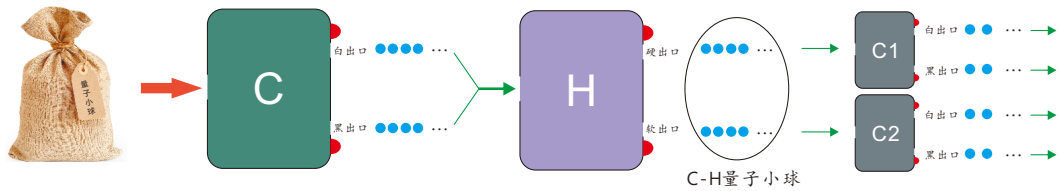


图 12

结果. 现在看到, 用 C 仪器分别检测 C-H 量子小球和 H-C 量子小球, 得到了不同的结果, 因此, 这两种量子小球的状态不同, 进而说明 C 测量和 H 测量不能对易, C 表象和 H 表象彼此不相容.

对所谓的 C-H 量子小球和 H-C 量子小球再作一些补充说明. 实际上, 用以后要学到的概念来说, 它们的量子态都是最大混合态, 有相同的数学形式, 即

$$\text{双值量子系统最大混合态的密度矩阵} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

仅仅就这个相同的数学形式而言, 二者不可区分. 但是, 二者的经历的过程是不相同的, 更确切地说, 两种量子小球的组成成分是不同的.

$$\text{C-H 量子小球的状态} = \left\{ \frac{1}{2}, |\text{硬}\rangle; \frac{1}{2}, |\text{软}\rangle \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中花括号中的描述指的是, 在 C-H 量子小球中各有 1/2 的几率分别处于状态“硬”和状态“软”, 这两个状态分别用 $|\text{硬}\rangle$ 和 $|\text{软}\rangle$ 表示.

$$\text{H-C 量子小球的状态} = \left\{ \frac{1}{2}, |\text{白}\rangle; \frac{1}{2}, |\text{黑}\rangle \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

也就是说, 在 H-C 量子小球中, 各有 1/2 的几率分别处于状态 $|\text{白}\rangle$ 和状态 $|\text{黑}\rangle$.

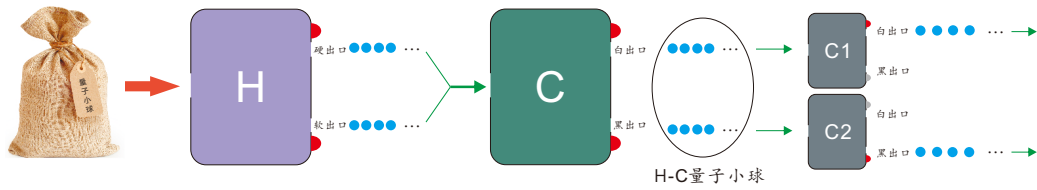


图 13

虽然不能严格区分这两种量子小球，但是，有一定的几率可以区分它们，那就是，当我们观察到 C1 的黑出口或者 C2 的白出口上指示灯闪亮的时候，就可以断定检测对象是 C-H 量子小球。

4

量子态

量子态是为了描述量子系统的状态而构造出来的数学形式，用 Dirac 符号 $|\cdot\rangle$ 表示量子态。量子态不是用来描述现象的，只有经过测量才能看到现象；量子态也不是用来描述几率的，也只有经过测量才能谈论某个现象出现的几率。

量子态承担的任务是，对所有可能的测量给出测量结果的（概率意义上的）定量描述。

下一章将讨论量子态的具体形式，在这里，先说下面两件事：

1. 我们用 Dirac ket 符号表示这样一类事物的状态——可以回答“看到了什么”这类问题，但是难以回答“它是什么”这样的问题。
2. 在不同的表象中，同一个量子态有不同的表示形式。

对于第一件事，考虑在 C-H-C 序列测量看到的现象。第一个 C 仪器的白出口上指示灯闪亮了，表明有一个量子小球从这个出口出来，对此我们不能说“它是白色的”，也不能说“在以后的颜色检验中，这个量子小球将始终表现为白色（除非是关于颜色的重复检验）。”实际上，接着对它进行的硬度检验和再一次的颜色检验，那么从第二个 C 仪器出来的量子小球不再一定表现出白色了。

我们可以在 Dirac 符号里写上描述现象的话，但是要始终记住，量子态和现象不在同一个层次，不能相提并论。在测量结果中，与某个明确的“现象”对应的量子态可以写作 $|\text{现象}\rangle$ 。比如前面提到的 $|\text{白}\rangle$ 和 $|\text{黑}\rangle$ ，或者 $|\text{硬}\rangle$ 和 $|\text{软}\rangle$ 。

如果没有测量，没有看到明确的现象，那么就不能在 ket 符号中写入描述现象的话，只能写 $|\text{量子态}\rangle$ ， $|\text{幻形怪}\rangle$ ，或者抽象的 $|\psi\rangle$ 。在真实的 SG 实验中，进入非均匀磁场的银原子的状态是未知的，而且是混合态，只能用以后将要讨论的密度矩阵（或者说密度算子） ρ 表示。

对于第二件事，考虑图 14 所示的观测过程，

当处于量子态 $|\text{白}\rangle$ 的量子小球经历硬度检验的时候，就应该在硬度表象中重新表示它的状态。参考观察结果——从硬出口和软出口出来的几率均为 1/2，将 $|\text{白}\rangle$ 表示为

$$|\text{白}\rangle = |\text{硬}\rangle + |\text{软}\rangle \quad (1)$$

这个等式的左端描述的是某个量子态可以在颜色表象中表示为 $|\text{白}\rangle$ ，右端描述的是该量子态可以在硬度表象中表示为 $|\text{硬}\rangle + |\text{软}\rangle$ 。等式 (1) 的意思是，同一个量子态在不同表象中有不同的表示形式，它们是相等的。

对于等式 (1) 右端的叠加形式，合理的说法是最为朴素的：

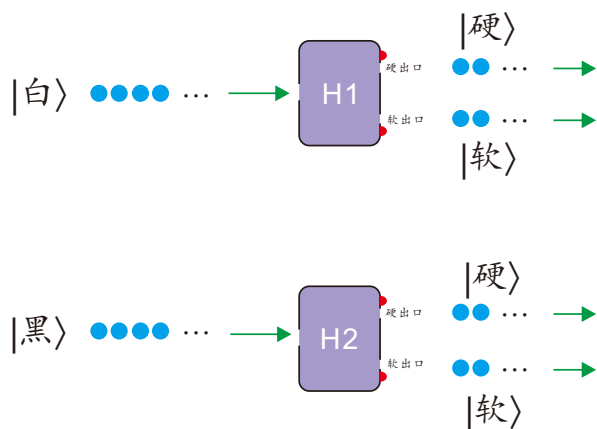


图 14

- 在硬度表象中, 量子小球的状态是 $|\text{硬}\rangle + |\text{软}\rangle$.

或者, 在明确指出测量过程的前提下, 可以说:

- 用 C 仪器检验量子小球, 一定会看到白出口上指示灯闪亮, 而黑出口上指示灯从不闪亮.
- 用 H 仪器检验量子小球, 看到硬出口上指示灯闪亮的可能性是 $1/2$, 看到软出口上指示灯闪亮的可能性也是 $1/2$.

以下两种看法是不合理的:

1. 量子小球可能处于状态 $|\text{硬}\rangle$, 也可能处于状态 $|\text{软}\rangle$.
2. 量子小球既处于状态 $|\text{硬}\rangle$, 又处于状态 $|\text{软}\rangle$.

References

- [1] ALBERT, Quantum Mechanics and Experience, Havard University Press, 1992.